পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষৎ প্রণীত

গণিত

নবম ও দশম শ্রেণী

(দ্বিতীয় খণ্ড)

পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষৎ

কর্তৃক প্রকাশিত

পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষৎ প্রণীত

গণিত

নবম ও দশম শ্রেণী

দ্বিতীয় খণ্ড

[জ্যামিতি, পরিমিতি ও ত্রিকোণমিতি]

সমস্ত অনুমোদিত বিদ্যালয়ের নবম ও দশম শ্রেণীর জন্য গণিতের একমাত্র পাঠ্যপুস্তক

পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষৎ কর্তৃক প্রকাশি

WEST BENGAL BOARD OF SECONDARY EDUCATION
77/2 Park Street, Calcutta-700 016

FIRST EDITION 1985
Reprint 1986
Revised Edition 1987
Reprint 1988
Reprint 1989
Revised Edition 1989
Reprint 1991
Integrated Ganit, 1992
Reprint 1995
Reprint : 1996
Reprint : 1997

PUBLISHED BY PROF. UJJWAL BASU, SECRETARY, WEST BENGAL BOARD OF SECONDARY EDUCATION, 77/2, PARK STREET, CALCUTTA-700 016 AND

Printed by : S. Antool & Co. Private Limited
91, Acharya Prafulla Chandra Road, Calcutta - 700 009

ভূমিকা

মধ্যশিক্ষা পর্ষদ্ কর্তৃক স্বীকৃত বিদ্যালয়গুলিতে গণিত বিষয় পঠন-পাঠনে বর্তমানে যে পাঠ্যসূচী অনুসরণ করা হয় তা ১৯৮১ সাল থেকে শুরু করে পর্যায়ক্রমে ষষ্ঠ থেকে দশম শ্রেণীতে প্রবর্তিত হয়েছে। ওই পাঠ্যসূচী-নির্ভর পাঠ্যপুস্তক রচনার দায়িত্বও পর্ষদ্ গ্রহণ করেছিল। অবশ্য ষষ্ঠ শ্রেণীর পুস্তকটি পর্ষদ্ কর্তৃক রচিত হলেও তার প্রকাশনার দায়িত্ব গ্রহণ করেন পশ্চিমবঙ্গ সরকার। বইটি বিনামূল্যে বিতরণের ব্যবস্থাও তাঁরাই করেছেন।

যেহেতু নবম-দশম শ্রেণীর মিলিত পাঠক্রমের ওপর মাধ্যমিক পরীক্ষা নেওয়া হয়ে থাকে, তাই নবম ও দশম শ্রেণীর পাঠ্যপুস্তকের পুনর্বিন্যাস করে একটি অখণ্ড পুস্তকে রূপ দেওয়ার ব্যবস্থা হয়েছে। এর ফলে পুস্তকের কলেবরের কথা চিন্তা করে পুস্তকটি দুটি খণ্ডে প্রকাশিত হচ্ছে—প্রথম খণ্ডে থাকছে পাটীগণিত ও বীজগণিত এবং দ্বিতীয় খণ্ডে থাকছে জ্যামিতি, পরিমিতি ও ত্রিকোণমিতি। এই সুযোগে বইগুলিতে যে সব ত্রুটি ও অসঙ্গতি নজরে পড়েছে তা দূর করে বই-এর মান আরও উন্নয়ণের প্রচেষ্টা করা হয়েছে।

এই প্রসঙ্গে পর্ষদ্ প্রণীত পুস্তকগুলিই যে পর্ষদ্ অনুমোদিত একমাত্র পাঠ্যপুস্তক তা আবার সকলকে স্মরণ করিয়ে দিতে চাই। বিদ্যালয় কর্তৃপক্ষের কাছে আমার অনুরোধ তাঁরা যেন ষষ্ঠ থেকে দশম শ্রেণী পর্যন্ত কোনো শ্রেণীর পাঠ্যপুস্তক তালিকায় অন্য কোনো গণিত পুস্তকের নাম পাঠ্যপুস্তক হিসাবে অন্তর্ভূক্ত করে ছাত্র-ছাত্রীদের এবং অভিভাবক-অভিভাবিকাদের বিভ্রান্তিতে না ফেলেন।

বহু গণিত শিক্ষক, শিক্ষাবিদ ও শিক্ষানুরাগী এমন কি বহু ছাত্র-ছাত্রী বিভিন্ন সময়ে পর্ষদ্ প্রণীত পুস্তকগুলির ত্রুটি-বিচ্যুতি পর্ষদের নজরে এনে পুস্তকগুলির মানোন্নয়নে সাহায্য করেছেন। আশাকরি ভবিষ্যতেও তাঁদের কাছ থেকে এরূপ সহযোগিতা পাওয়া যাবে।

৭৭/২, পার্ক স্ট্রীট,
কলিকাতা-৭০০ ০১৬

চিত্তরঞ্জন বন্দ্যোপাধ্যায়
সভাপতি
৯.১০.৯১

Revised Syllabus in Mathematics for classes IX & X
[Geometry, Mensuration & Trigonometry]

Geometry **Marks 30**

1. Revision of previous works through simple exercises.
2. To establish the following propositions :
   (a) Each diagonal of a parallelogram divides the parallelogram into congruent triangles.
   The opposite sides and angles of a parallelogram are equal and the diagonals bisect one another.
   (b) A quardrilateral is a parallelogram if
   (i) opposite sides are equal, or
   (ii) opposite angles are equal, or
   (iii) any two opposite sides are equal and parallel, or
   (iv) its diagonals bisect one another.
   (c) If there are three or more parallel lines and the intercepts made by them on any one straight line that cuts them are equal, then the corresponding intercepts on any other straight line that cuts them are also equal.
   (d) The straight line, drawn through the middle point of one side of a triangle parallel to another side, bisects the thrid side and is equal to half of the second side. The line segment joining the middle points of two sides of a triangle is parallel to the third side and is equal to half of it.
   (e) (i) Parallelograms on the same base and between the same parallels (or of the same altitude) are equal in area.
   (ii) Triangles on the same base (or on equal bases) and between the same parallels (or of the same altitude) are equal in area.
   (iii) Triangles having equal area, on the same base and on the same side of it, are between the same parallels.
   (iv) If a triangle and a parallelogram stand on the same base and between the same parallels, the area of the triangle is half that of the parallelogram.
   (f) (i) The perpendicular bisectors of the sides of a triangle are concurrent.
   (ii) The perpendiculars drawn from the vertices of a triangle on the opposite sides are concurrent.

(iii) The bisectors of the angles of a triangle are concurrent.

(iv) The medians of a triangle are concurrent.

3. 'Phthagoras' Theorem—Statement and demonstration through activity only.
4. Constructions with proofs :

   (i) To draw a parallelogram equal in area to a given triangle and having one of its angles equal to a given angle.

   (ii) To draw a triangle equal in area to a given quardrilateral.
5. Simple problems based on the above propositions and constructions.
6. Revision of previous work through simple exercises.
7. To prove that

   (a) There is one circle and only one which passes through three given points not in a straight line.

   (b) A straight line drawn from the centre of a circle to bisect a chord which is not a diameter is at right angles to the chord, and conversely.

   (c) The angle which an arc of a circle subtends at the centre is double that which it subtends at any point on the remaining part of the circumference.

   (d) Angles on the same segment of a circle are equal. If a line segment joining two points subtends equal angles at two other points on the same side of it, the four points shall lie on a circle.

   (e) The angle in a semi-circle is a right angle.

   (f) The opposite angles of any quadrilateral inscribed in a circle are supplementary, and conversely.

   (g) (i) The tangent at any point of a circle and its radius through that point are perpendicular to one another.

   (ii) The segments of two tangents of a circle from an external point to the points of contact are equal and they subtend equal angles at the centre.

   (iii) If two circles touch, the point of contact lies on the straight line through the centres.
8. Properties of Ratio and Proportion with reference to geometrical figures.
9. To prove that :

   (a) If a straight line is drawn parallel to one side of a triangle the other two sides are divided proportionally, and the converse. (Proof based on the area proposition should be used.)

(b) If two triangles are equiangular, their corresponding sides are proportional, and conversely.

(c) If a perpendicular is drawn from the vertex containing the right angle of a right-angled triangle, on the hypotenuse, the triangles on each side of the perpendicular are similar to the whole triangle and to one another.

(d) Pythagoras' theorem and its converse.

10. Constructions with proofs :
    (i) To draw a circle circumscribing a triangle.
    (ii) To draw a circle inscribed in a triangle.
    (iii) To draw a tangent to a circle :
        (a) from an external point,
        (b) at a point on the circle.
    (iv) To draw common tangents to two given circles.
    (v) To draw the mean proportional of two line segments.
11. Simple problems based on the above propositions and constructions.

Mensuration **Marks 15**

1. Perimeter and area of a rectangle, a square, a triangle. Area of any rectilinear figure.
2. Circumference and area of a circle. (The approximate value of π to be taken as $\frac{22}{7}$)
   (only statement of formulae and their numerical applications)
3. Revision of previous work through simple exercises.
4. Surface and volume of
   (i) a rectangular parallelopiped,
   (ii) a right circular cylinder, and a right circular cone, and
   (iii) a sphere.

Trigonometry **Marks 15**

1. Idea of trigonometrical angles :
   Positive and Negative angles. Measurement of angles in Sexagesimal and Circular measures only. (π radian = 180° to be assumed).
2. Definition of Trigonometrical ratio of an acute angle, Trigonometrical ratios of the following angles : 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, (except undefined values such as tan 90°, cot 0°).
3. Trigonometrical ratios of complementary angles.
4. Simple problems on heights and distances reducible to the solution of right-angled triangles involving the angles mentioned above.

সূচীপত্র

জ্যামিতি

পরিমিতি

ত্রিকোণমিতি

জ্যামিতি

প্রথম অধ্যায়

পূর্বপাঠের অনুশীলনী

অনুশীলনী 1

(প্রতি ক্ষেত্রে তোমার উত্তরের সমর্থনে যুক্তি দেবে)

1. ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার $\angle A$ সমকোণ এবং $\angle C = 55^\circ$; AB বাহুর উপরিস্থিত যেকোনো বিন্দু D থেকে DE, BC-এর উপর লম্ব। $\angle BDE$-এর মান কত ? ΔABC ও ΔDBE-এর মধ্যে সম্পর্ক কি ?

2. *(i)* একটি 10 বাহুবিশিষ্ট বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি কত ? ওই বহুভুজের বাহুগুলি একই ক্রমে একই দিকে বর্ধিত করলে বহিঃকোণগুলির সমষ্টিই বা কত হবে ? বহুভুজটির বাহুসংখ্যা 12 হলে, অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি ও বহিঃকোণগুলির সমষ্টি কত হতো ?

(ii) যে সুষম বহুভুজের একটি বহিঃকোণ 40°, তার বাহুসংখ্যা কত ?

(iii) যে সুষম বহুভুজের একটি অন্তঃকোণ 150°, তার বাহুসংখ্যা কত ?

(iv) একটি 9 বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজের প্রত্যেকটি অন্তঃকোণ ও প্রত্যেকটি বহিঃকোণের পরিমাণ কত ?

3. ΔABC-এর BC বাহুকে D বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হল। $\angle ACD = 112^\circ$ এবং $\angle B = \frac{3}{4}\angle A$; $\angle A$-এর মান কত ?

4. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের $AB = AC$, $\angle A = 70^\circ$; BC-কে উভয়দিকে বর্ধিত করায় যে দুটি বহিঃকোণ উৎপন্ন হল, তাদের সমদ্বিখণ্ডক দুটি O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। $\angle BOC$-এর মান কত ? $ABOC$ চতুর্ভুজের চারটি কোণের মান নির্ণয় কর।

5. নিম্নলিখিত কোন কোন ক্ষেত্রে P, Q, R বিন্দু তিনটি সমরেখ হবে ?

(i) $QP = QA = QR$ এবং $\angle AQP$ ও $\angle AQR$ দুটি সন্নিহিত কোণ ; $\angle APQ = 70^\circ$, $\angle QAR = 45^\circ$;

(ii) $QP = QA = QR$ এবং $\angle AQP$ ও $\angle AQR$ দুটি সন্নিহিত কোণ ; $\angle APQ = 70^\circ$, $\angle QAR = 20^\circ$;

(iii) একটি সমবাহু ত্রিভুজ APQ এবং একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ AQR, যার AQ বাহু $= QR$ বাহু এমনভাবে অবস্থিত যে $\angle AQP$ ও $\angle AQR$ দুটি সন্নিহিত কোণ। $\angle QAR = 30^\circ$;

(iv) একটি সমবাহু ত্রিভুজ APQ এবং একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ AQR, যার AQ বাহু $= QR$ বাহু এমনভাবে অবস্থিত যে $\angle AQP$ ও $\angle AQR$ দুটি সন্নিহিত কোণ। $\angle QAR = 40°$;

(v) AB রেখাংশের মধ্যবিন্দু Q ; AP ও BR দুটি সমান রেখাংশ এমনভাবে টানা হল যে এই রেখাংশ দুটির একটি AB রেখাংশের যেদিকে অবস্থিত, অপরটি যেন তার বিপরীত দিকে অবস্থিত হয় এবং $\angle PAQ = \angle RBQ$;

(vi) AB রেখাংশের মধ্যবিন্দু Q ; AP ও BR দুটি সমান ও সমান্তরাল রেখাংশ এমনভাবে টানা হল যে রেখাংশ দুটির একটি AB রেখাংশের যেদিকে অবস্থিত, অপরটি যেন তার বিপরীত দিকে অবস্থিত হয় ;

(vii) ΔAPQ-এর $\angle APQ = 60°$ এবং $\angle PAQ = 30°$, ΔAQR-এর $AQ = QR$ এবং $\angle QAR = 45°$; $\angle AQP$ ও $\angle AQR$ দুটি সন্নিহিত কোণ ;

(viii) QST একটি ত্রিভুজ। $\angle PQT = \angle QTS$ এবং QT-এর যে পার্শ্বে $\angle QTS$ অবস্থিত, $\angle PQT$ তার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। $\angle RQS = \angle QST$ এবং QS-এর যে পার্শ্বে $\angle QST$ অবস্থিত, $\angle RQS$ তার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

6. সমবাহু ত্রিভুজ ABC-এর BC বাহুকে D বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যেন $CD = AB$. $\angle BAD$-এর মান কত ?

7. ΔABC-এর $AC = BC$ এবং $\angle ABC = 70°$, BC বাহুকে D বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যেন $BC = CD$. $\angle BAD$-এর মান কত ?

8. ΔABC-এর $AB = AC$ এবং $\angle ACB = 50°$. CA-কে D বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যেন $\angle ABD = 40°$. AB ও AD-এর মধ্যে সম্পর্ক কি ?

9. $ABCD$ সামান্তরিকের $\angle BAD = 45°$; অপর তিনটি কোণের প্রত্যেকটির মান নির্ণয় কর।

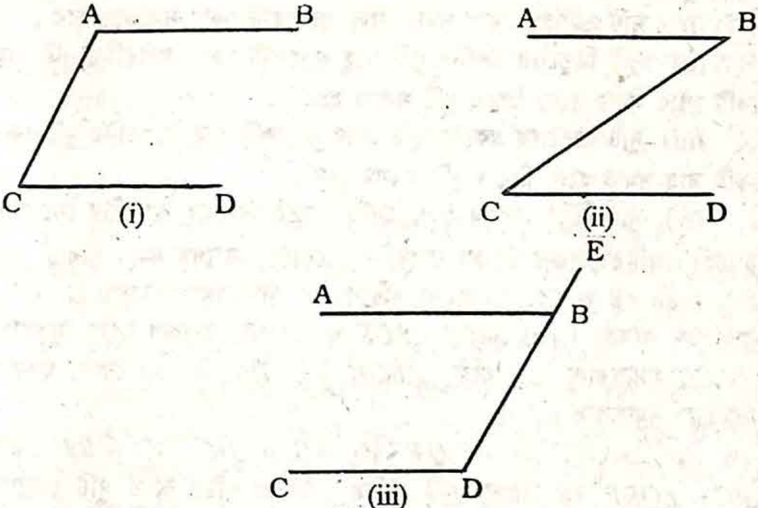
10. $ABCDEF$ একটি ষড়ভুজ এবং O তার অন্তস্থ একটি বিন্দু। ষড়ভুজের বাহুগুলি O বিন্দুতে যে কোণগুলি উৎপন্ন করে সেগুলি পরস্পর সমান হলে প্রত্যেকটির মান কত ? O বিন্দুগামী কোন কোন রেখাংশ একই সরলরেখায় থাকবে ? ঐ রেখাংশগুলি দৈর্ঘ্য সমান হলে, $ABCDEF$ চিত্রটি কি ধরনের বহুভুজ হবে ?

11. *(i)* ΔABC-এর $\angle ABC = 50°$, $\angle BCA = 60°$; ত্রিভুজের বাহুগুলিকে মানের অধঃক্রম অনুসারে সাজাও ;

(ii) ΔABC-এর $AB = 5$ সেমি, $BC = 4$ সেমি ও $CA = 7$ সেমি ; ত্রিভুজের কোণগুলিকে মানের ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজাও।

12. AB ও CD সরলরেখা দুটি O বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করেছে। $\angle AOD = \frac{3}{2} \angle DOB$ হলে, প্রত্যেকটি কোণের মান কত ?

13. নিম্নে প্রদত্ত চিত্রগুলি থেকে (রেখাংশগুলিকে কোনোদিকে বর্ধিত না করে) বল কি বা কি কি শর্তে AB ও CD রেখাংশ দুটি সমান্তরাল হবে।



চিত্র নং ঃ 1

14. নিম্নলিখিত কোন কোন ক্ষেত্রে চতুর্ভুজ অঙ্কন সম্ভব হবে ? যে ক্ষেত্রে সম্ভব হবে সেক্ষেত্রে বাহুগুলিকে যেকোনো ক্রমে নিলেই চলবে, না একটা বিশেষ ক্রমে নিতে হবে তাও বল ঃ

(i) কর্ণের দৈর্ঘ্য 7 সেমি এবং বাহুগুলির দৈর্ঘ্য 5 সেমি, 2 সেমি, 6 সেমি, 4 সেমি ;

(iii) কর্ণের দৈর্ঘ্য 7 সেমি এবং বাহুগুলির দৈর্ঘ্য 3 সেমি, 5 সেমি, 4 সেমি, 2 সেমি ;

(iii) কর্ণের দৈর্ঘ্য 7 সেমি এবং বাহুগুলির দৈর্ঘ্য 6 সেমি, 5 সেমি, 4 সেমি, 4 সেমি।

15. AB, BC ও CA রেখাংশ তিনটির BC রেখাংশটি AB-এর চেয়ে 4 সেমি বড়, CA রেখাংশটি AB-এর চেয়ে 8 সেমি ছোট। AB রেখাংশটি অন্তত কত সেন্টিমিটার থেকে বড় হলে, এই তিনটি রেখাংশ দিয়ে একটি ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব হবে ?

16. AB একটি সরলরেখা ও O তার বহিঃস্থ একটি বিন্দু। AB সরলরেখার উপর P, Q, R, S বিন্দুগুলি এমনভাবে একই ক্রমে অবস্থিত যে $\angle OPB = 60^\circ$, $\angle POQ = 20^\circ$, $\angle POR = 30^\circ$ এবং $\angle POS = 40^\circ$. OP, OQ, OR, OS রেখাংশ চারটির মধ্যে কোনটি সব চেয়ে ছোট এবং কোন দুটি রেখাংশ পরস্পর সমান ? তোমার মতে যে রেখাংশটি ছোট তার চেয়েও ছোট কোনো রেখাংশ O বিন্দু থেকে AB পর্যন্ত টানা যাবে কি ?

17. নিম্নলিখিত উক্তিগুলিতে যে জ্যামিতিক অশুদ্ধি আছে সেগুলি শুদ্ধ করে উক্তিগুলি পুনরায় লেখ :

(i) দুটি সন্নিহিত কোণ সমান হলে, প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ হবে ;

(ii) দুটি ত্রিভুজের একটির দুটি বাহু ও একটি কোণ, অপরটির দুটি বাহু ও একটি কোণ সমান হলে, ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে ;

(iii) দুটি ত্রিভুজের একটির দুটি কোণ ও একটি বাহু, অপরটির দুটি কোণ ও একটি বাহু সমান হলে, ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে ;

(iv) দুটি ত্রিভুজ সর্বসম হলে, একটির যেকোনো বাহু অপরটির যেকোনো বাহুর এবং একটির যেকোনো কোণ অপরটির যেকোনো কোণের সমান হবে ;

(v) AB ও CD সরলরেখা দুটিকে EF সরলরেখা যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করেছে। (a) যেহেতু $\angle BGE$ ও $\angle DHG$ অনুরূপ কোণ, সুতরাং AB ও CD সমান্তরাল, (b) যেহেতু $\angle BGH$ ও $\angle GHC$ একান্তর কোণ, সুতরাং AB ও CD সমান্তরাল।

18. (i) ΔABC ও ΔPQR-এর $AB = QR$, $BC = RP$ এবং $\angle ABC = \angle QRP$ বলে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম। ত্রিভুজ দুটির অপর দুটি কোণের কোনটি কোনটির সমান হবে ?

(ii) ΔPQR ও ΔXYZ-এর $\angle PQR = \angle YZX, \angle PRQ = \angle YXZ$ এবং $QR = ZX$ বলে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম। ত্রিভুজ দুটির অপর বাহু দুটির কোনটির সঙ্গে কোনটি সমান হবে ?

(iii) ΔABC ও ΔXYZ-এর $AB = ZY$, $BC = YX$ এবং $CA = XZ$ বলে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম। ত্রিভুজ দুটির তিনটি কোণের কোনটির সঙ্গে কোনটি সমান হবে ?

অনুশীলনী 2

1. AB একটি 6 সেমি রেখাংশ অঙ্কন কর। A বিন্দুতে AB-কে বাহু করে একটি 60° কোণ অঙ্কন কর এবং অপর বাহু থেকে 4·5 সেমি-এর সমান করে AC অংশ কেটে নাও। C বিন্দু দিয়ে AB-এর এবং B বিন্দু দিয়ে AC-এর সমান্তরাল অঙ্কন কর। তারা D বিন্দুতে ছেদ করল। $ABDC$ চতুর্ভুজটি কি ধরনের চতুর্ভুজ ?

2. AB একটি 8 সেমি রেখাংশ অঙ্কন কর। C এমন একটি বিন্দু নাও যা AB সরলরেখার বহিঃস্থ। C বিন্দু দিয়ে AB-এর সমান্তরাল অঙ্কন কর। ওই সমান্তরাল সরলরেখার উপর D একটি বিন্দু নাও। A, C ও A, D যুক্ত কর। B বিন্দু দিয়ে AC ও AD-এর সমান্তরাল অঙ্কন কর, যারা CD সরলরেখাকে

যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। এর ফলে যে দুটি সামান্তরিক উৎপন্ন হল তাদের নাম লেখ।

3. AB একটি যেকোনো রেখাংশ অঙ্কন কর। AB-এর মধ্যবিন্দু O নির্ণয় কর (রুলার ও কম্পাসের সাহায্যে)। O বিন্দু দিয়ে OC একটি রেখাংশ অঙ্কন কর এবং বর্ধিত CO থেকে CO-এর সমান করে OD অংশ কেটে নাও। সেট-স্কোয়ারের সাহায্যে দেখ তো AC ও DB-এর মধ্যে কি সম্পর্ক। AD ও CB-এর মধ্যেই বা কি সম্পর্ক?

4. $ABCD$ একটি সামান্তরিক অঙ্কন কর, যার AB বাহু $= 8{\cdot}5$ সেমি, AD বাহু $= 5{\cdot}7$ সেমি এবং $\angle BAD = 60°$. DC-এর উপর E একটি বিন্দু নিয়ে B, E যুক্ত কর। A বিন্দু দিয়ে BE-এর সমান্তরাল অঙ্কন কর যা বর্ধিত CD-কে F বিন্দুতে ছেদ করে। $ABEF$ কি ধরনের চতুর্ভুজ বল তো।

5. $ABCD$ একটি রম্বস অঙ্কন কর, যার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সেমি এবং $\angle BAD = 45°$. A ও B বিন্দুতে AB-এর উপর লম্ব অঙ্কন কর, যারা বর্ধিত CD ও CD-কে যথাক্রমে F ও E বিন্দুতে ছেদ করে। $ABEF$ চতুর্ভুজের AB ও EF বাহু দুটির মধ্যে কি সম্পর্ক তা সেট-স্কোয়ারের সাহায্যে নির্ণয় কর। এবার বল তো $ABEF$ চতুর্ভুজটি কি ধরনের চতুর্ভুজ।

6. ΔABC-এর $AB = 7{\cdot}5$ সেমি, $BC = 12{\cdot}5$ সেমি ও $CA = 10$ সেমি; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। এবার একটি সমকোণী ত্রিভুজ BCD অঙ্কন কর, যার $\angle C$ সমকোণ, $CD = 6$ সেমি এবং BC-এর যেদিকে A বিন্দু অবস্থিত D বিন্দুও যেন সেদিকেই পড়ে। AD সরলরেখাটি অঙ্কন কর। সেট-স্কোয়ারের সাহায্যে দেখ তো AD ও BC সরলরেখা দুটির মধ্যে কি সম্পর্ক।

7. ΔABC-এর $AB = 8$ সেমি, $BC = 5$ সেমি ও $\angle ABC = 60°$; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। শীর্ষবিন্দুগুলি থেকে যথাক্রমে বিপরীত বাহুগুলির উপর লম্ব অঙ্কন কর। লম্বগুলি কিভাবে অবস্থিত লক্ষ কর তো।

8. ΔABC-এর $AB = 3{\cdot}5$ সেমি, $BC = 4$ সেমি ও $CA = 4{\cdot}7$ সেমি; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। A বিন্দু দিয়ে BC-এর সমান্তরাল অঙ্কন কর। এবার B বিন্দু দিয়ে CA-এর সমান্তরাল অঙ্কন কর, যা A বিন্দুগামী সমান্তরাল সরলরেখাটিকে P বিন্দুতে ছেদ করে। আবার C বিন্দু দিয়ে AB-এর সমান্তরালে অঙ্কন কর, যা A বিন্দুগামী সমান্তরাল সরলরেখাকে Q বিন্দুতে ও B বিন্দুগামী সমান্তরাল সরলরেখাকে R বিন্দুতে ছেদ করে। $ABCQ$, $APBC$ ও $ABRC$ চতুর্ভুজগুলি কি ধরনের চতুর্ভুজ হল বল তো। কাঁটা-কম্পাসের সাহায্যে মেপে বল তো নিম্নলিখিত রেখাংশগুলির মধ্যে কি সম্পর্ক ঃ

(i) AP ও AQ, (ii) BP ও BR, (iii) CR ও CQ, (iv) AB ও QR, (v) BC ও PQ, (vi) CA ও RP.

9. ΔABC-এর $\angle ABC = 75^\circ, \angle BCA = 45^\circ$ এবং $BC = 7$ সেমি ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্ব সমদ্বিখণ্ডকগুলি অঙ্কন কর। লম্ব সমদ্বিখণ্ডকগুলি কিভাবে অবস্থিত লক্ষ কর তো।

10. ΔABC-এর $\angle A$ সমকোণ, অতিভুজ $BC = 10$ সেমি এবং $AB = 6$ সেমি ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। ত্রিভুজের কোণগুলির অন্তর্দ্বিখণ্ডক অঙ্কন কর। অন্তর্দ্বিখণ্ডকগুলি কিভাবে অবস্থিত লক্ষ কর তো।

11. ΔABC-এর $\angle BAC = 105^\circ, \angle BCA = 45^\circ$ ও $AC = 4{\cdot}6$ সেমি। বাহুগুলির মধ্যবিন্দু নির্ণয় কর (রুলার ও পেন্সিল কম্পাসের সাহায্যে)। এবার ত্রিভুজের মধ্যমাগুলি অঙ্কন কর। মধ্যমাগুলি কিভাবে অবস্থিত লক্ষ কর তো।

12. ΔABC-এর $\angle ABC = 30^\circ$, $AB = AC = 9$ সেমি ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। BC-কে সমদ্বিখণ্ডিত কর। A বিন্দু দিয়ে BC-এর সমান্তরাল অঙ্কন কর। BC-এর মধ্যবিন্দু O-তে $\angle COD = 60^\circ$ এমনভাবে অঙ্কন কর যে OD বাহু BC-এর সমান্তরাল সরলরেখাটিকে D বিন্দুতে ছেদ করে। এবার C বিন্দু দিয়ে OD-এর সমান্তরাল অঙ্কন কর, যা BC-এর সমান্তরাল সরলরেখাটিকে E বিন্দুতে ছেদ করে। $CODE$ চতুর্ভূজটি কি ধরনের চতুর্ভুজ হল বল তো।

13. $ABCD$ একটি চতুর্ভুজ অঙ্কন কর, যার $AB = 4$ সেমি, $BC = 5$ সেমি, $CD = 3$ সেমি, $DA = 6$ সেমি এবং কর্ণ $AC = 7$ সেমি। B বিন্দু দিয়ে AC-এর সমান্তরাল অঙ্কন কর।

14. একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন কর, যার বাহু $6{\cdot}8$ সেমি।

15. ΔABC-এর $\angle B$ সমকোণ, অতিভুজ $CA = 7{\cdot}5$ সেমি ও $BC = 6$ সেমি। ত্রিভুজটি অঙ্কন কর এবং ত্রিভুজের বাহু তিনটির উপর ত্রিভুজের বাইরের দিকে যথাক্রমে $ACKL, BCDE$ ও $ABFG$ বর্গক্ষেত্র তিনটি অঙ্কন কর।

অনুশীলনী 3

1. $ABCD$ একটি সামান্তরিক। সংজ্ঞা থেকে এর কি কি ধর্ম পাওয়া যায় লেখ। AC কর্ণ অঙ্কন করে প্রমাণ কর যে $\Delta ABC \cong \Delta ADC$.

2. AB ও DC রেখাংশ দুটি সমান ও সমান্তরাল। AC ও BD পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AO = OC, BO = OD$.

3. $ABCD$ একটি চতুর্ভুজ, যার $AB = DC$ এবং $AD = BC$; প্রমাণ কর যে, $\Delta ABC \cong \Delta ACD$.

4. $ABCD$ একটি চতুর্ভুজের চারটি কোণের সমষ্টি কত ? যদি ঐ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান হয়, তাহলে $\angle A$ ও $\angle D$-এর সমষ্টি কত ? এবার বল তো AB ও DC-এর মধ্যে কি সম্পর্ক। যুক্তি দাও।

5. $ABCD$ চতুর্ভুজের $AB = DC$ এবং $AB \parallel DC$; প্রমাণ কর যে, $\Delta ABC \cong \Delta ADC$.

6. AC ও BD রেখাংশ দুটি পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। প্রমাণ কর যে, $\Delta AOB \cong \Delta DOC$; এ থেকে প্রমাণ কর যে, $AB = DC$ ও $AB \parallel DC$.

7. $ABCD$ চতুর্ভুজের AB ও DC সমান ও সমান্তরাল। প্রমাণ কর যে, $\Delta ABC \cong \Delta CDA$; এ থেকে প্রমাণ কর যে, AD এবং BC-ও সমান ও সমান্তরাল।

8. ΔABC-এর AB বাহুর মধ্যবিন্দু D. D বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত যেকোনো সরলরেখা AC-কে E বিন্দুতে ছেদ করে। ঐ সরলরেখা থেকে ED-এর সমান করে DF কেটে নাও। B, F যুক্ত কর। প্রমাণ কর যে, $\Delta ADE \cong \Delta BDF$; এ থেকে প্রমাণ কর যে, $EC \parallel FB$. D বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত সরলরেখাটি যদি BC-এর সমান্তরাল হতো, তাহলে $BCEF$ চতুর্ভূজটি কি ধরণের হতো ? যুক্তি দাও।

9. ΔABC-এর AB ও AC বাহু দুটির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E. D, E যুক্ত করে এমনভাবে F বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর যে $EF = DE$. F, C যুক্ত কর। প্রমাণ কর যে, $\Delta ADE \cong \Delta CEF$; এ থেকে প্রমাণ কর যে, $BA \parallel CF$.

10. ΔABC-এর AB-এর মধ্যবিন্দু D-তে AB-এর উপর লম্ব এবং AC-এর মধ্যবিন্দু E-তে AC-এর উপর লম্ব পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। O, A ; O, B ও O, C যুক্ত কর। প্রমাণ কর যে, $\Delta AOD \cong \Delta$ BOD এবং $\Delta AOE \cong \Delta COE$; এ থেকে প্রমাণ কর যে, $OA = OB = OC$.

11. ΔABC-এর $\angle B$ ও $\angle C$-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক দুটি পরস্পরকে I বিন্দুতে ছেদ করে। I থেকে BC, CA ও AB বাহু তিনটির উপর অঙ্কিত লম্ব তিনটি যথাক্রমে ID, IE ও IF. প্রমাণ কর যে, $\Delta CID \cong \Delta CIE$ এবং $\Delta BID \cong \Delta BIF$; এ থেকে প্রমাণ কর যে, $ID = IE = IF$.

12. $\angle BAC$-এর কৌণিক অঞ্চলে O এমন একটি বিন্দু যে O থেকে যথাক্রমে AB ও AC-এর উপর অঙ্কিত লম্বদৈর্ঘ্য OD ও OE পরস্পর সমান। প্রমাণ কর যে, $\Delta OAD \cong \Delta OAE$.

13. AB ও CD দুটি রেখাংশ। CD রেখাংশের উপর E, F দুটি বিন্দু এমনভাবে অবস্থিত যে C, E, F, D বিন্দু চারটি এই ক্রমেই থাকে। AE ও BD সমান ও সমান্তরাল এবং AC ও BF সমান ও সমান্তরাল। প্রমাণ কর যে, $\Delta ACE \cong \Delta BFD$.

14. AB রেখাংশের A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে AP ও BQ, AB-এর উপর লম্ব। $AP = BQ$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\Delta ABP \cong \Delta ABQ$; এ থেকে প্রমাণ কর যে, $BP = AQ$.

15. AB রেখাংশের A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে AP ও BQ, AB-এর উপর

লম্ব। AQ ও BP পরস্পরকে R বিন্দুতে ছেদ করে। $AP>BQ$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\angle ABP>\angle BAQ$; এ থেকে প্রমাণ কর যে, $AR>BR$.

16. DE রেখাংশের উপর B ও C বিন্দু দুটি এমনভাবে অবস্থিত যে বিন্দু চারটি $D—B—C—E$ এই ক্রমে আছে। ΔABC এমন একটি ত্রিভুজ যে, $AB = BD$ এবং $AC = CE$; প্রমাণ কর যে, $\angle ADB = \frac{1}{2}\angle ABC$, $\angle AEC = \frac{1}{2}\angle ACB$; আরও প্রমাণ কর যে, $\angle DAE = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$.

17. ΔABC-এর $\angle A$ স্থূলকোণ। BA বাহুকে D বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যে $AD = CD$. প্রমাণ কর যে, $\angle BAC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ADC$.

18. ΔABC-এর BA বাহুকে D বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যে $AD = AC$. প্রমাণ কর যে, $\angle BAC = 2\angle ADC$.

দ্বিতীয় অধ্যায়

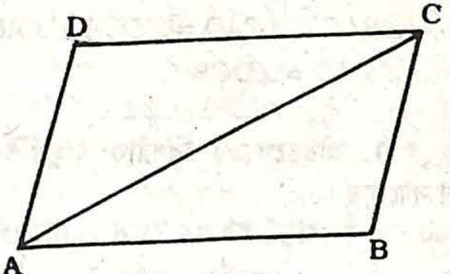
উপপাদ্য

2.1 সামান্তরিকের ধর্ম সংক্রান্ত উপপাদ্য ঃ

সামান্তরিকের সংজ্ঞা থেকে আমরা সামান্তরিকের যে ধর্ম পাই, তা হল বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল। কিন্তু এ ছাড়াও সামান্তরিকের আরও কয়েকটি ধর্ম আছে। সেগুলি আমরা পরের উপপাদ্যগুলিতে পাব।

উপপাদ্য 17

সামান্তরিকের যেকোনো কর্ণ সামান্তরিককে দুটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে এবং সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান ও বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান ও বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান।



চিত্র নং ঃ 2

ধরা যাক, $ABCD$ একটি সামান্তরিক, যার $AB \parallel DC$ এবং $AD \parallel BC$. AC কর্ণ টানা হল।

প্রমাণ করতে হবে যে, (i) $\Delta ABC \cong \Delta CDA$.

(ii) $AB = DC$

এবং $AD = BC$,

(iii) $\angle BAD = \angle DCB$

এবং $\angle ABC = \angle CDA$.

প্রমাণঃ $\because$ $AB \parallel DC$ এবং AC ভেদক,

$\therefore \angle BAC =$ একান্তর $\angle DCA$.

আবার, $\because$ $AD \parallel BC$ এবং AC ভেদক,

$\therefore \angle ACB =$ একান্তর $\angle CAD$,

এবার, ΔABC ও ΔCDA-এর

$\angle BAC = \angle ACD$ (প্রমাণিত),

$\angle ACB = \angle CAD$ (প্রমাণিত)

এবং AC সাধারণ ;

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta CDA$ (i)

আবার, $\because \Delta ABC \cong \Delta CDA$,

$\therefore AB = DC$

এবং $AD = BC$ (অনুরূপ বাহু)। (ii)

আবার $\because \Delta ABC \cong \Delta CDA$,

$\therefore \angle ABC = \angle CDA$ (অনুরূপ কোণ)।

পূর্বেই প্রমাণিত হয়েছে যে

$\angle BAC = \angle DCA$ এবং $\angle CAD = \angle ACB$.

$\therefore \angle BAC + \angle CAD = \angle DCA + \angle ACB$.

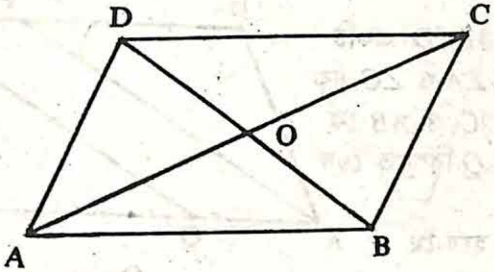
$\therefore \angle BAD = \angle DCB$. (iii)

অনুসিদ্ধান্ত ঃ **1.** আয়তক্ষেত্রের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান ও প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ।

2. বর্গক্ষেত্রের সবগুলি বাহুই পরস্পর সমান ও প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ।

উপপাদ্য 18

কোনো সামান্তরিকের কর্ণ দুটি পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।



চিত্র নং ঃ 3

ধরা যাক, $ABCD$ একটি সামান্তরিক, যার $AB \parallel DC$ ও $AD \parallel BC$. AC ও BD কর্ণ দুটি পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AO = OC$ এবং $BO = OD$.

প্রমাণঃ $\because AB \parallel CD$ এবং AC ভেদক,

$\therefore \angle OAB =$ একান্তর $\angle OCD$.

আবার, $\because ABCD$ একটি সামান্তরিক,

$\therefore AB = DC$.

এবার, ΔAOB ও ΔCOD-এর

$\angle OAB = \angle OCD$ (প্রমাণিত)

$\angle AOB =$ বিপ্রতীপ $\angle COD$

এবং $AB = DC$; (অনুরূপ বাহু)

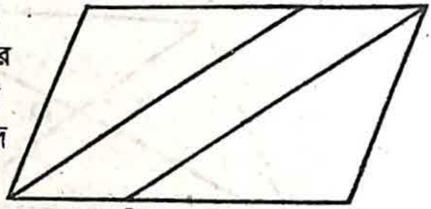
$\therefore \Delta AOB \cong \Delta COD$.

$\therefore AO = OC$ এবং $BO = OD$ (অনুরূপ বাহু)

কয়েকটি প্রয়োগ ঃ

1. কোনো সামান্তরিকের যেকোনো দুটি বিপরীত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় সমান্তরাল।

ধরা যাক, $ABCD$ একটি সামান্তরিক। এর $\angle A$ ও $\angle C$-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় DC ও AB-কে যথাক্রমে P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করেছে।



চিত্র নং ঃ 4

প্রমাণ করতে হবে যে, $AP \parallel QC$.

প্রমাণ ঃ $\angle DPA =$ একান্তর $\angle PAQ$ [$\because DC \parallel AB$]

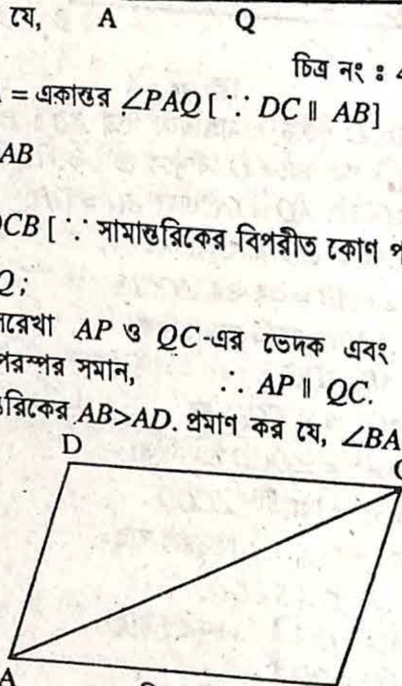
$= \frac{1}{2} \angle DAB$

$= \frac{1}{2} \angle DCB$ [$\because$ সামান্তরিকের বিপরীত কোণ পরস্পর সমান]

$= \angle DCQ$;

কিন্তু DPC সরলরেখা AP ও QC-এর ছেদক এবং অনুরূপ কোণ $\angle DPA$ ও $\angle DCQ$ পরস্পর সমান, $\therefore AP \parallel QC$.

2. $ABCD$ সামান্তরিকের $AB > AD$. প্রমাণ কর যে, $\angle BAC < \angle DAC$.



চিত্র নং ঃ 5

প্রমাণঃ $\because ABCD$ একটি সামান্তরিক,

$\therefore AD = BC$.

আবার, $AD \parallel BC$, AC ছেদক ;

$\therefore \angle DAC =$ একান্তর $\angle ACB$.

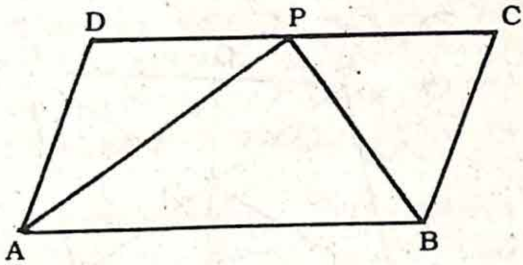
$\because AB > AD$,

$\therefore AB > BC$.

$\therefore \Delta ABC$-এর $\angle BAC < \angle ACB$.

$\therefore \angle BAC < \angle DAC$.

3. $ABCD$ সামান্তরিকের $AB = 2AD$. প্রমাণ কর যে, $\angle A$ ও $\angle B$-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় DC-এর মধ্যবিন্দুতে সমকোণে মিলিত হবে।



চিত্র নং ঃ 6

ধরা যাক, $ABCD$ সামান্তরিকের $\angle A$-এর সমদ্বিখণ্ডক DC-এর সঙ্গে P বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। P, B যুক্ত করা হল।

প্রমাণ করতে হবে যে, (i) P বিন্দু DC-এর মধ্যবিন্দু, (ii) BP, $\angle B$-এর সমদ্বিখণ্ডক এবং (iii) $\angle APB = 1$ সমকোণ।

প্রমাণঃ $\because AP, \angle A$-এর সমদ্বিখণ্ডক,

$\therefore \angle DAP = \angle PAB$

$= $ একান্তর $\angle DPA$ ($\because DC \parallel AB$).

$\therefore \Delta DAP$-এর

$$DP = DA = \frac{1}{2}AB$$

$$= \frac{1}{2}DC.$$

$\therefore PC = DP = DA = BC.$

$\therefore P$ বিন্দু DC-এর মধ্যবিন্দু, ... (i)

$\therefore \Delta CPB$-এর $\angle CBP = \angle CPB$ ($\because PC = BC$)

$= $ একান্তর $\angle PBA$ ($\because DC \parallel AB$).

$\therefore PB, \angle ABC$-এর সমদ্বিখণ্ডক ....(ii)

আবার, $\angle PAB + \angle ABP = \frac{1}{2}(\angle DAB + \angle ABC)$

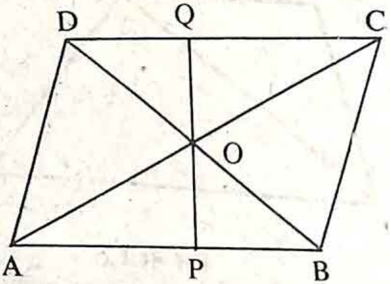
$$= \frac{1}{2} \times 180° = 90°,$$

$\therefore \angle APB = 180° - (\angle PAB + \angle ABP)$

$= 180° - 90°$

$= 90° = 1$ সমকোণ ....(iii)

4. $ABCD$ সামান্তরিকের AC ও BD পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। O বিন্দুগামী যেকোনো সরলরেখা AB ও DC-কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ কর যে, $OP = OQ$.



চিত্র নং ঃ 7

ΔPBO ও ΔQDO-এর

$\angle PBO =$ একান্তর $\angle QDO$

[$\because DC \parallel AB$],

$\angle POB =$ বিপ্রতীপ $\angle QOD$ এবং অনুরূপ বাহুদ্বয় $OB = OD$

[$\because$ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে] ।

$\therefore \Delta PBO \cong \Delta QDO.$

$\therefore OP = OQ.$ (অনুরূপ বাহু)

অনুশীলনী 4

1. কর্ণ ব্যবহার না করে কেবল সমান্তরাল সরলরেখার ধর্ম থেকে প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান।

2. কোনো সামান্তরিকের চারটি কোণের সমদ্বিখণ্ডকগুলি যে চতুর্ভুজ গঠন করে, প্রমাণ কর যে, সেটি একটি আয়তক্ষেত্র।

3. প্রমাণ কর যে, কোনো আয়তক্ষেত্রের কর্ণ দুটি পরস্পর সমান।

4. প্রমাণ কর যে, কোনো বর্গক্ষেত্রের কর্ণ দুটি পরস্পর সমান এবং তারা পরস্পরকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

5. ABC যেকোনো সমবাহু ত্রিভুজ এবং D, E, F যথাক্রমে BC, CA ও AB-এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর যে, ΔAEF ও ΔBDF-ও সমবাহু। এবার প্রমাণ কর যে, DE ও CF পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

6. একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়মের যেকোনো সমান্তরাল বাহুসংলগ্ন দুটি কোণ পরস্পর সমান—প্রমাণ কর।

7. কোনো সামান্তরিকের দুটি বিপরীত কোণ সম্পূরক হলে, প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকটি একটি আয়তক্ষেত্র।

8. $ABCD$ সামান্তরিকের AB ও AD বাহুর উপর যথাক্রমে $ABPQ$ ও $ADRS$ বর্গক্ষেত্র দুটি সামান্তরিকের বাইরে অবস্থিত। প্রমাণ কর যে, ΔPRC সমদ্বিবাহু।

9. $ABCD$ সামান্তরিকের $\angle A$ স্থূলকোণ ; দুটি সমবাহু ত্রিভুজ ABP ও ADQ সামান্তরিকের বাইরে অবস্থিত। প্রমাণ কর যে, $\Delta\, CPQ$ একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

10. $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের BC বাহুর উপর P যেকোনো একটি বিন্দু ; B বিন্দু থেকে AP-এর উপর অঙ্কিত লম্ব DC-কে Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ কর যে, $AP = BQ$.

11. OP, OQ ও OR তিনটি রেখাংশ। $OPAQ$, $OQBR$ ও $ORCP$ সামান্তরিক তিনটি অঙ্কন করা হল। প্রমাণ কর যে, AR, BP ও CQ পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

12. $ABCD$ একটি সামান্তরিক যার $\angle A$ সূক্ষ্মকোণ এবং EF তার বহিঃস্থ এমন একটি সরলরেখা যা CD-এর যে পার্শ্বে AB অবস্থিত সেই পার্শ্বেই আছে। AP, BQ, CR ও DS যথাক্রমে A, B, C, D বিন্দু চারটি থেকে অঙ্কিত EF-এর উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে, $SP + SQ = SR$.

13. $\Delta\, PQR$-এর মধ্যে O যেকোনো একটি বিন্দু। $QORX$, $ROPY$ এবং $POQZ$ সামান্তরিকগুলি অঙ্কন করা হল। প্রমাণ কর যে, $\Delta\, PQR \cong \Delta\, XYZ$.

14. $PQRS$ একটি সামান্তরিক। R বিন্দু দিয়ে $\angle Q$-এর সমদ্বিখণ্ডকের সমান্তরাল টানা হল যা বর্ধিত PQ-কে X বিন্দুতে এবং বর্ধিত PS-কে Y বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $\Delta\, PXY$ সমদ্বিবাহু এবং সামান্তরিকের পরিসীমা PX ও PY এর সমষ্টির সমান।

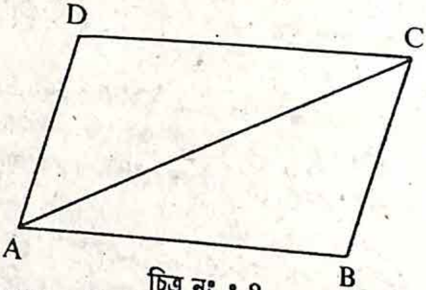
15. $\Delta\, ABC$-এর A, B, C বিন্দু দিয়ে বিপরীত বাহুগুলির সমান্তরাল অঙ্কন করা হল। প্রথম ও দ্বিতীয় সমান্তরাল দুটি পরস্পরকে P বিন্দুতে, দ্বিতীয় ও তৃতীয় পরস্পরকে Q বিন্দুতে এবং তৃতীয় ও প্রথম পরস্পরকে R বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, B, C, A যথাক্রমে PQ, QR ও RP এর মধ্যবিন্দু।

2.2 সামান্তরিক হওয়ার শর্তাবলী ও ঐ সংক্রান্ত উপপাদ্য ঃ

সামান্তরিকের সংজ্ঞা থেকেই কোনো চতুর্ভুজ সামান্তরিক হওয়ার প্রাথমিক শর্ত পাওয়া যায়। তা হল কোনো চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল হলেই চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হবে। কিন্তু এছাড়া আরও কয়েকটি শর্ত পাওয়া যায় তা পরবর্তী উপপাদ্যগুলি থেকে জানা যাবে।

উপপাদ্য 19

কোনো চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান হলে, চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হবে।



চিত্র নং ঃ 8

ধরা যাক, $ABCD$ একটি চতুর্ভুজ, যার $AB = DC$ এবং $AD = BC$.
প্রমাণ করতে হবে যে, $ABCD$ একটি সামান্তরিক।

অঙ্কন ঃ AC কর্ণ টানা হল।

প্রমাণ ঃ ΔABC ও ΔCDA-এর

$AB = DC$ এবং $BC = AD$ (কল্পনা অনুসারে),

AC সাধারণ।

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DCA$

$\therefore \angle BAC = \angle ACD$ (অনুরূপ)।

কিন্তু এরা একান্তর কোণ,

$\therefore AB \parallel DC.$

আবার, $\because \Delta ABC \cong \Delta CDA,$

$\therefore \angle ACB = \angle CAD$ (অনুরূপ)।

কিন্তু এরা একান্তর কোণ,

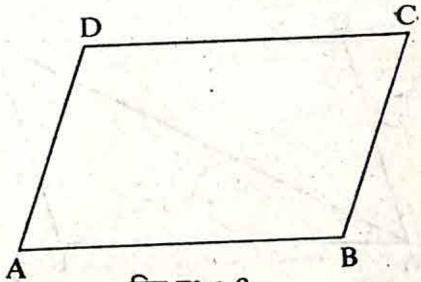
$\therefore AD \parallel BC$

$\therefore ABCD$ একটি সামান্তরিক।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ রম্বস একটি সামান্তরিক।

উপপাদ্য 20

কোনো চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান হলে, চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হবে।



চিত্র নং : 9

ধরা যাক, $ABCD$ একটি চতুর্ভুজ, যার $\angle BAD = \angle DCB$, $\angle ADC = \angle CBA$.

প্রমাণ করতে হবে যে, $ABCD$ একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ : $\angle BAD = \angle DCB$

এবং $\angle ADC = \angle CBA$ (কল্পনা অনুসারে),

$\therefore \angle BAD + \angle ADC = \angle DCB + \angle CBA$

$= \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle ADC + \angle DCB + \angle CBA$

$= \frac{1}{2} \times 4$ সমকোণ [$\because$ একটি চতুর্ভুজের চারটি কোণের সমষ্টি 4 সমকোণ]

$= 2$ সমকোণ।

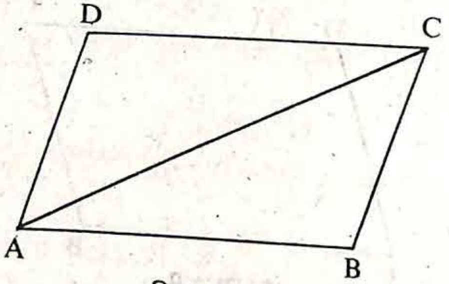
$\therefore AB \parallel DC$.

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $AD \parallel BC$.

$\therefore ABCD$ একটি সামান্তরিক।

উপপাদ্য 21

কোনো চতুর্ভুজের যেকোনো দুটি বিপরীত বাহু সমান ও সমান্তরাল হলে, চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হবে।



চিত্র নং ঃ 10

ধরাযাক, $ABCD$ চতুর্ভুজের $AB = DC$ এবং $AB \parallel DC$.

প্রমাণ করতে হবে যে, $ABCD$ একটি সামান্তরিক।

অঙ্কন ঃ AC কর্ণ টানা হল।

প্রমাণঃ $\because AB \parallel DC$ এবং AC ভেদক,

$\therefore \angle BAC =$ একান্তর $\angle DCA$.

এবার, ΔBAC ও ΔDCA-এর

$AB = DC$ (কল্পনানুসারে),

AC সাধারণ।

এবং অন্তর্ভূত $\angle BAC =$ অন্তর্ভূত $\angle DCA$ (একান্তর) ;

$\therefore \Delta BAC \cong \Delta DCA$.

$\therefore \angle BCA = \angle DAC$ (অনুরূপ)।

কিন্তু এরা একান্তর কোণ, $\therefore BC \parallel AD$.

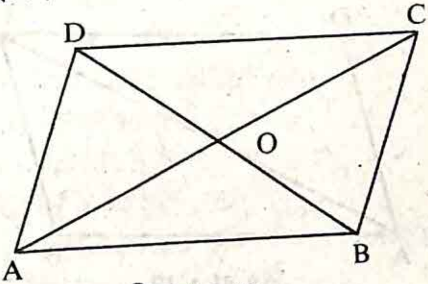
$\because AB \parallel DC$ (কল্পনানুসারে)

এবং $BC \parallel AD$ (প্রমাণিত),

$\therefore ABCD$ একটি সামান্তরিক

উপপাদ্য 22

কোনো চতুর্ভুজের কর্ণ দুটি পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হবে।



চিত্র নং ঃ 11

ধরা যাক, $ABCD$ চতুর্ভুজের দুটি কর্ণ AC ও BD পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে, অর্থাৎ $AO = OC$ এবং $BO = OD$.

প্রমাণ করতে হবে যে, $ABCD$ একটি সামান্তরিক।

প্রমাণঃ ΔAOB ও ΔCOD-এর

$OA = OC$

এবং $OB = OD$ (কল্পনানুসারে)

এবং অন্তর্ভূত $\angle AOB =$ অন্তর্ভূত $\angle COD$

($\because$ এরা বিপ্রতীপ কোণ)।

$\therefore \Delta AOB \cong \Delta COD$,

$\therefore AB = DC$ (অনুরূপ)

এবং $\angle OAB = \angle OCD$ (অনুরূপ),

অর্থাৎ $\angle CAB = \angle ACD$.

কিন্তু এরা একান্তর কোণ,

$\therefore AB \parallel DC$.

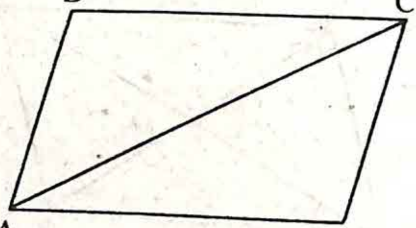
$\because AB = DC$ এবং $AB \parallel DC$,

$\therefore ABCD$ একটি সামান্তরিক।

[মন্তব্য ঃ 22 নং উপপাদ্যটি প্রমাণ করতে গিয়ে 'চতুর্ভুজের দুটি বিপরীত বাহু সমান ও সমান্তরাল হলে, চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হবে'—এই ধর্ম ব্যবহার করা হয়েছে। কিন্তু এই ধর্ম ব্যবহার না করে সামান্তরিকের সংজ্ঞা থেকেই উপপাদ্যটি প্রমাণ করা যেত। ΔBOC ও ΔDOA সর্বসম প্রমাণ করে প্রমাণ করা যেত যে, BC ও AD সমান্তরাল। তা থেকেই প্রমাণ হতো যে, $ABCD$ চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।]

কয়েকটি প্রয়োগ ঃ

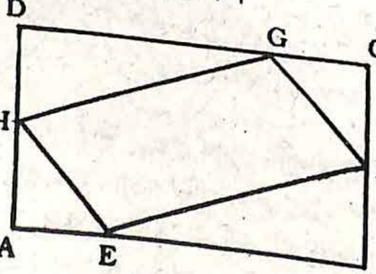
1. কোনো চতুর্ভুজের দুটি বিপরীত কোণ পরস্পর সমান ও দুটি বিপরীত বাহু পরস্পর সমান্তরাল হলে, চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হবে–প্রমাণ কর।



চিত্র নং ঃ 12

ধরা যাক, $ABCD$ চতুর্ভুজের $\angle ABC = \angle DCA$ এবং $AB \parallel DC$.
প্রমাণ করতে হবে যে, $ABCD$ একটি সামান্তরিক।
অঙ্কন ঃ AC কর্ণ টানা হ'ল।
প্রমাণ ঃ $\because$ $AB \parallel DC$ এবং AC ভেদক,
$\therefore \angle BAC =$ একান্তর $\angle DCA$.
এবার ΔABC ও ΔADC-এর
$\angle BAC = \angle DCA$ (প্রমাণিত),
$\angle ABC = \angle CDA$ (কল্পনানুসারে),
$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle ACB =$ অবশিষ্ট $\angle CAD$.
কিন্তু এরা একান্তর কোণ, $\therefore$ $AD \parallel BC$.
$\because$ $AB \parallel DC$ এবং $AD \parallel BC$, $\therefore ABCD$ একটি সামান্তরিক।

2. $ABCD$ আয়তক্ষেত্রের AB, BC, CD, DA বাহুগুলির উপর যথাক্রমে E, F, G, H বিন্দুগুলি এমনভাবে অবস্থিত যে $AE = BF = CG = DH$. প্রমাণ কর যে, $EFGH$ একটি সামান্তরিক।



চিত্র নং ঃ 13

অঙ্কন ঃ $E, F ; F, G ; G, H ; H, E$ যুক্ত করা হল।

প্রমাণ ঃ $\because ABCD$ একটি আয়তক্ষেত্র,

$\therefore AB = DC.$

আবার, $\because AE = CG,$

$\therefore EB = DG.$

অনুরূপে, $AH = FC.$

এবার, ΔGDH ও ΔEBF-এর

$DH = BF$ (কল্পনানুসারে),

$DG = BE$ (প্রমাণিত)

এবং অন্তর্ভূত $\angle GDH =$ অন্তর্ভূত $\angle EBF$

[$\because$ আয়তক্ষেত্রের প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ] ;

$\therefore \Delta GDH \cong \Delta EBF.$

$\therefore HG = EF$ (অনুরূপ) ।

অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায় যে,

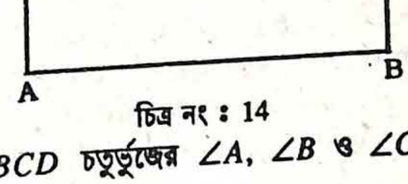
$EH = FG.$

$\because EFGH$ চতুর্ভুজের $EF = HG$

এবং $EH = FG,$

$\therefore EFGH$ একটি সামান্তরিক ।

3. কোনো চতুর্ভুজের তিনটি কোণ সমকোণ হলে, প্রমাণ কর যে, চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র ।



চিত্র নং ঃ 14

ধরা যাক, $ABCD$ চতুর্ভুজের $\angle A$, $\angle B$ ও $\angle C$-এর প্রত্যেকেই সমকোণ ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $ABCD$ একটি আয়তক্ষেত্র ।

প্রমাণ ঃ $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D =$ চার সমকোণ ;

কিন্তু $\angle A + \angle B + \angle C = 3$ সমকোণ,

$\therefore \angle D = 1$ সমকোণ ।

$\therefore$ $\angle A = \angle C$ এবং

$\angle B = \angle D$ [প্রত্যেকেই 1 সমকোণ] ।

$\therefore$ $ABCD$ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি সমান ।

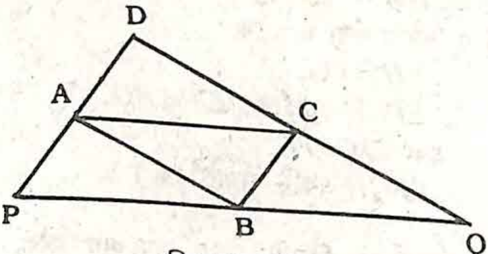
$\therefore$ $ABCD$ একটি সামান্তরিক ।

আবার, $ABCD$ সামান্তরিকের $\angle A$ সমকোণ,

$\therefore$ $ABCD$ একটি আয়তক্ষেত্র ।

4. $ABCD$ একটি সামান্তরিক, DA ও DC-কে যথাক্রমে P ও Q পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যে $AP = DA$ এবং $CQ = DC$. প্রমাণ কর যে P, B, Q সমরেখ ।

অঙ্কন : P, B ; B, Q ও A, C যুক্ত করা হল ।



চিত্র নং : 15

প্রমাণ : $\because$ $ABCD$ একটি সামান্তরিক,

$\therefore$ $DA = CB$ ও $DA \parallel CB$.

কিন্তু $AP = DA$ (কল্পনানুসারে),

$\therefore$ AP ও CB সমান ও সমান্তরাল ।

$\therefore$ $APBC$ একটি সামান্তরিক ।

$\therefore$ $AC \parallel PB$.

আবার অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়, AB ও CQ সমান ও সমান্তরাল ।

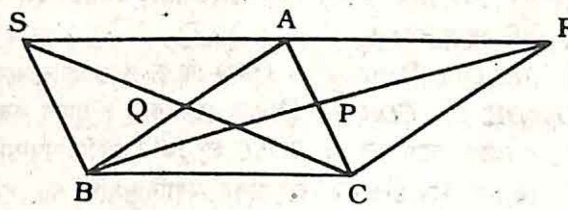
$\therefore$ $ABCQ$ একটি সামান্তরিক ।

$\therefore$ $AC \parallel BQ$.

$\therefore$ B বিন্দুগামী দুটি রেখাংশ একই সরলরেখা AC-এর সমান্তরাল ।

$\therefore$ P, B, Q বিন্দু তিনটি সমরেখ ।

5. ΔABC-এর BP ও CQ মধ্যমা দুটি যথাক্রমে R ও S বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যে $BP = PR$ এবং $CQ = QS$. প্রমাণ কর যে, S, A, R বিন্দু তিনটি সমরেখ ।



চিত্র নং : 16

অঙ্কন : S, A ; A, R ; S, B ও R, C যুক্ত করা হল।

প্রমাণ : $\because$ BP মধ্যমা, $\therefore$ $AP = PC$.

আবার, $BP = PR$ (কল্পনানুসারে),

$\therefore$ $ABCR$ একটি সামান্তরিক।

$\therefore$ $BC \parallel AR$.

অনুরূপে, $ACBS$ একটি সামান্তরিক।

$\therefore$ $BC \parallel SA$.

$\therefore$ A বিন্দুগামী দুটি রেখাংশ একই সরলরেখা BC-এর সমান্তরাল।

$\therefore$ রেখাংশ দুটি একই সরলরেখায় অবস্থিত।

$\therefore$ S, A, R বিন্দু তিনটি সমরেখ।

অনুশীলনী 5

1. $ABCD$ সামান্তরিকের AB ও DC-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q. প্রমাণ কর যে, $APCQ$ একটি সামান্তরিক।

2. $PQRS$ সামান্তরিকের SQ কর্ণ K ও L বিন্দুতে সমান তিন ভাগে বিভক্ত হয়েছে। PK, SR-কে M বিন্দুতে এবং RL, PQ-কে N বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $PMRN$ একটি সামান্তরিক।

3. $ABCD$ ও $CDEF$ দুটি সামান্তরিক ; প্রমাণ কর যে, $ABEF$ একটি সামান্তরিক।

4. $ABCD$ একটি আয়তক্ষেত্র। দুটি বিপরীত বাহু AB ও CD-কে বাহু করে আয়তক্ষেত্রের বাইরে দুটি সমবাহু ত্রিভুজ ΔABP ও ΔCDQ অঙ্কন করা হল। প্রমাণ কর যে, $APCQ$ একটি সামান্তরিক।

5. $KLMN$ একটি সামান্তরিক। KL, LM, MN ও NK বাহুগুলি থেকে যথাক্রমে KP, LQ, MR ও NS সমান অংশ কেটে নেওয়া হল। প্রমাণ কর যে, $PQRS$ একটি সামান্তরিক।

6. $ABCD$ একটি সামান্তরিক। AD-কে E পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যে $AD = DE$. BE, CD-কে F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $\Delta DEF \cong \Delta BFC$, এ থেকে প্রমাণ কর যে, $BDEC$ চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

7. কোনো সামান্তরিকের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি পর পর যুক্ত করে যে চতুর্ভুজটি পাওয়া যায়, প্রমাণ কর যে, সেটি একটি সামান্তরিক।

8. কোনো আয়তক্ষেত্রের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি পর পর যুক্ত করলে যে চতুর্ভুজটি গঠিত হয়, প্রমাণ কর যে, সেটি একটি রম্বস।

9. প্রমাণ কর যে, কোনো রম্বসের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি পর পর যুক্ত করলে একটি আয়তক্ষেত্র গঠিত হবে।

10. প্রমাণ কর যে, কোনো বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি পর পর যুক্ত করলে একটি বর্গক্ষেত্র গঠিত হবে।

11. $ABCD$ চতুর্ভুজের $AD = BC$ এবং $\angle BAD = \angle ABC$. প্রমাণ কর যে, চতুর্ভুজটি একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম।

12. PQR একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার $\angle P$ সমকোণ এবং QR-এর মধ্যবিন্দু A. P বিন্দু দিয়ে QR-এর সমান্তরাল ST এমনভাবে টানা হল যে, $PS = PT = PA$ এবং Q ও S বিন্দু দুটি একই দিকে অবস্থিত হয়। প্রমাণ কর যে, $QRTS$ একটি সামান্তরিক।

13. ΔPQR এর PQ ও PR বাহু দুটির উপর যথাক্রমে S ও T দুটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, RS ও QT পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করতে পারে না।

14. $ABCD$ ও $AECF$ দুটি সামান্তরিকেরই AC একটি কর্ণ। B, E, D, F সমরেখ না হলে, প্রমাণ কর যে, $BEDF$ একটি সামান্তরিক।

15. $ABCD$ একটি চতুর্ভুজ। $ABCE$ ও $BADF$ সামান্তরিক দুটি অঙ্কন করা হল। প্রমাণ কর যে, CD ও EF পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে।

16. প্রমাণ কর যে, যে সামান্তরিকে দুটি কর্ণ সমান, তা একটি আয়তক্ষেত্র। এর থেকে প্রমাণ কর যে, কোন বৃত্তের AB ও CD দুটি ব্যাস হলে, $ACBD$ একটি আয়তক্ষেত্র।

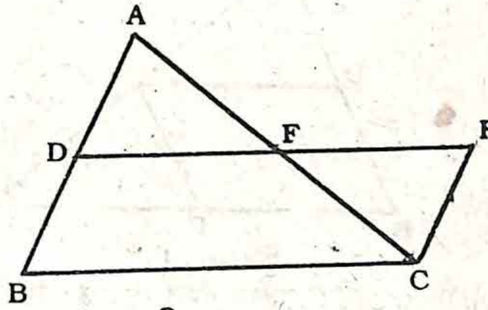
17. $PQRS$ একটি রম্বস। P বিন্দুগামী QS-এর সমান্তরাল সরলরেখার উপর S বিন্দু থেকে SA লম্ব টানা হল। PR ও QS কর্ণ দুটির ছেদবিন্দু O. OA, PS-কে B বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে,

(i) $POSA$ একটি আয়তক্ষেত্র, (ii) $BO = \frac{1}{2}PQ$.

2.3 মধ্যবিন্দু সংক্রান্ত উপপাদ্য ঃ

উপপাদ্য 23

যেকোনো ত্রিভুজের কোনো একটি বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত দ্বিতীয় একটি বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে এবং ত্রিভুজের বাহুগুলির দ্বারা সমান্তরাল সরলরেখার খণ্ডিতাংশ দ্বিতীয় বাহুর অর্ধেক হবে।



চিত্র নং ঃ 17

ধরা যাক, ΔABC-এর AB বাহুর মধ্যবিন্দু D দিয়ে অঙ্কিত BC-এর সমান্তরাল সরলরেখা AC-কে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে, (i) $AE = EC$, (ii) $DE = \frac{1}{2}BC$.

অঙ্কন ঃ C বিন্দু দিয়ে BA-এর সমান্তরাল টানা হল, যা বর্ধিত DE-কে F বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ ঃ $\because$ $BD \parallel CF$ এবং $DF \parallel BC$

$\therefore$ $BCFD$ একটি সামান্তরিক ;

$\therefore$ $BD = CF$.

কিন্তু $BD = DA$ [$\because$ D, AB-এর মধ্যবিন্দু]।

$\therefore$ $DA = CF$.

এবার, ΔADE ও ΔCFE-এর

$\angle DAE =$ একান্তর $\angle FCE$ [$\because$ $BA \parallel CF$ এবং AC ভেদক]

$\angle AED =$ বিপ্রতীপ $\angle CEF$

এবং $AD = CF$; (অনুরূপ বাহু)

$\therefore$ $\Delta ADE \cong \Delta CFE$.

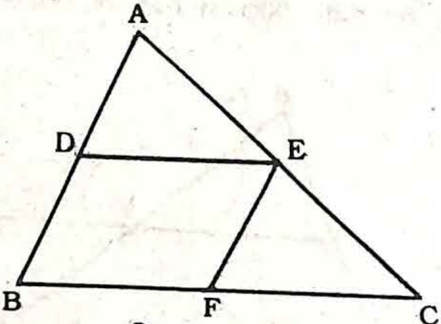
$\therefore$ $AE = EC$ (অনুরূপ) (i)

এবং $DE = EF$.

$\therefore$ $DE = \frac{1}{2}DF = \frac{1}{2}BC$. (ii)

[মন্তব্য ঃ উপরের উপপাদ্যটি প্রমাণ করার জন্য যে অঙ্কন করা হয়েছে, তার পরিবর্তে অন্য রকম অঙ্কন করেও উপপাদ্যটি প্রমাণ করা যায় ।

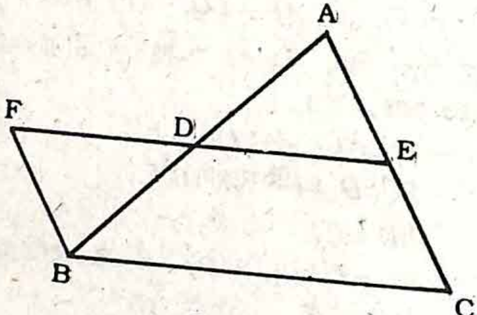
(i) মনে করি, E বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত AB-এর সমান্তরাল সরলরেখা BC-কে F বিন্দুতে ছেদ করে ।



চিত্র নং ঃ 18

এবার ΔADE ও ΔEFC সর্বসম প্রমাণ করে উপপাদ্যটি প্রমাণ কর ।

(ii) ED-কে F বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যেন $DF = ED$. B, F যুক্ত কর ।

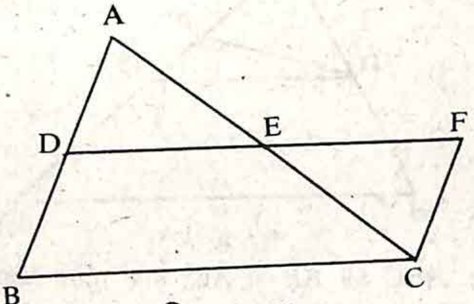


চিত্র নং ঃ 19

এবার ΔADE ও ΔBDF সর্বসম প্রমাণ করে এবং $BCEF$-কে একটি সামান্তরিক প্রমাণ করে উপপাদ্যটি প্রমাণ কর ।]

উপপাদ্য 24

যেকোনো ত্রিভুজের কোনো দুটি বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক।



চিত্র নং : 20

ধরা যাক, ΔABC-এর AB ও AC বাহু দুটির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E. D, E যুক্ত করা হল।

প্রমাণ করতে হবে যে, (i) $DE \parallel BC$, (ii) $DE = \frac{1}{2}BC$.

অঙ্কন : C বিন্দু দিয়ে BA-এর সমান্তরাল টানা হল, যা বর্ধিত DE-কে F বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : $\because$ $BA \parallel CF$ এবং AC ভেদক,

$\therefore$ $\angle DAE =$ একান্তর $\angle FCE$.

এবার, ΔCEF ও ΔDAE-এর

$\angle FCE = \angle DAE$ ($\because$ $BA \parallel CF$ এবং AC ভেদক),

$\angle FEC =$ বিপ্রতীপ $\angle DEA$

এবং $EC = AE$ ($\because$ E, AC বাহুর মধ্যবিন্দু)

এবং এরা অনুরূপ বাহু,

$\therefore$ $\Delta CEF \cong \Delta ADE$;

$\therefore$ $FC = AD = DB$.

আবার অঙ্কনানুসারে, $FC \parallel DB$,

$\therefore$ $BCFD$ একটি সামান্তরিক।

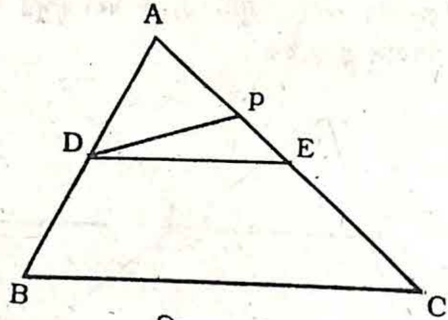
$\therefore$ $DF \parallel BC$,

অর্থাৎ, $DE \parallel BC$. ....(i)

আবার, $\because$ $\Delta ADE \cong \Delta CFE$,

$\therefore$ $DE = EF = \frac{1}{2}DF = \frac{1}{2}BC$. ....(ii)

বিকল্প প্রমাণ ঃ



চিত্র নং ঃ 21

ধরা যাক, ΔABC-এর AB ও AC বাহু দুটির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E. D, E যুক্ত করা হল।

প্রমাণ করতে হবে যে, (i) $DE \parallel BC$, (ii) $DE = \frac{1}{2}BC$.

প্রমাণ কর ঃ DE, BC-এর সমান্তরাল না হলে, মনে করি, D বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত BC-এর সমান্তরাল সরলরেখা AC-কে P বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ P, AC-এর মধ্যবিন্দু।

কিন্তু কল্পনানুসারে E, AC-এর মধ্যবিন্দু,

$\because$ একই রেখাংশের দুটি মধ্যবিন্দু হওয়া অসম্ভব,

$\therefore$ DE, BC-এর সমান্তরাল হবে। ....(i)

$\because$ D বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত BC-এর সমান্তরাল সরলরেখা AC-কে E বিন্দুতে ছেদ করে,

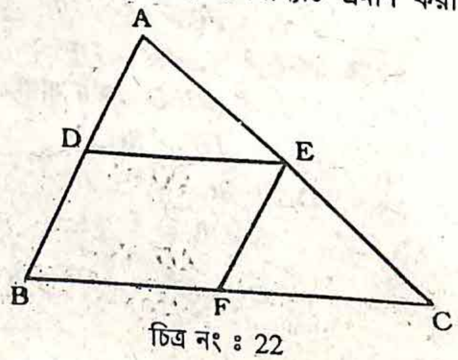
$\therefore$ $DE = \frac{1}{2}BC$.

[মন্তব্য ঃ (1) যেহেতু উপপাদ্য 24, উপপাদ্য 23-এর বিপরীত উপপাদ্য, সেজন্য উপরের পদ্ধতিতে প্রমাণ করা হল।

(2) এক্ষেত্রেও অন্য ধরনের অঙ্কনের সাহায্যে উপপাদ্যটি প্রমাণ করা যায়।

(i) E বিন্দু দিয়ে AB-এর সমান্তরাল অঙ্কন করা হল, যা BC-কে F বিন্দুতে ছেদ করে।

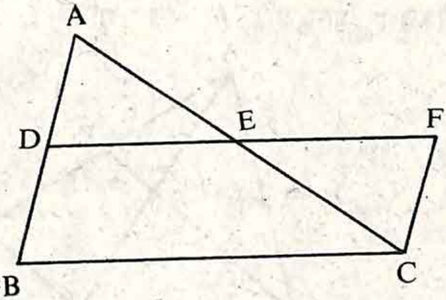
উপপাদ্য 23-এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $BDEF$ একটি সামান্তরিক। তা থেকে উপপাদ্যটি প্রমাণ কর।



চিত্র নং ঃ 22

(ii) DE-কে F পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যে, $EF = DE$.

এবার, ΔADE ও ΔCFE সর্বসম প্রমাণ করে ও $BCFD$ একটি সামান্তরিক প্রমাণ করে উপপাদ্যটি প্রমাণ কর।]



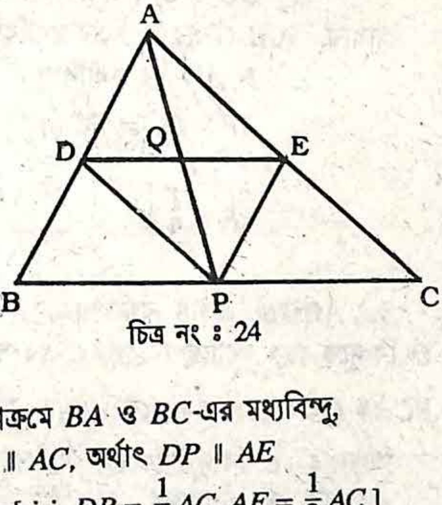
চিত্র নং ঃ 23

কয়েকটি প্রয়োগ ঃ

1. প্রমাণ কর যে, কোন ত্রিভুজের দুটি বাহুর মধ্যবিন্দু দুটির সংযোজক রেখাংশ ও তৃতীয় বাহুর উপর মধ্যমা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

ধরা যাক, ΔABC-এর AB ও AC বাহু দুটির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E. BC বাহুর উপর মধ্যমা AP, মনে করি, DE-কে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $DQ = QE$ এবং $AQ = QP$.



চিত্র নং ঃ 24

অঙ্কন ঃ P, D ; P, E যুক্ত করা হল।

প্রমাণ ঃ $\because$ D, P যথাক্রমে BA ও BC-এর মধ্যবিন্দু,

$\therefore$ $DP \parallel AC$, অর্থাৎ $DP \parallel AE$

এবং $DP = AE$ $\quad [\because DP = \frac{1}{2}AC, AE = \frac{1}{2}AC]$

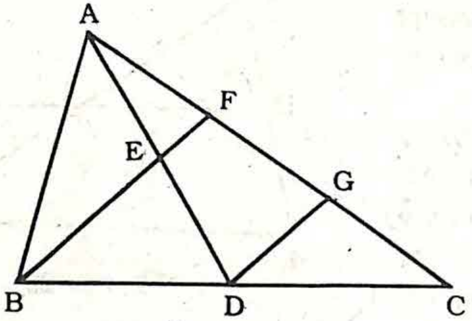
$\therefore$ $DPEA$ একটি সামান্তরিক,

$\therefore$ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় DE ও AP পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore$ $DQ = QE$ এবং $AQ = QP$.

2. ΔABC-এর AD মধ্যমার মধ্যবিন্দু E. বর্ধিত BE, AC-কে F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AF = \frac{1}{3}AC$.

অঙ্কন ঃ মনে করি, FC-এর মধ্যবিন্দু G. D, G যুক্ত করা হল।



চিত্র নং ঃ 25

প্রমাণ ঃ ΔCBF-এর CB ও CF বাহু দুটির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও G.

$\therefore$ $DG \parallel BF$, অর্থাৎ, $DG \parallel EF$.

আবার, ΔADG-এর AD-এর মধ্যবিন্দু E এবং $EF \parallel DG$,

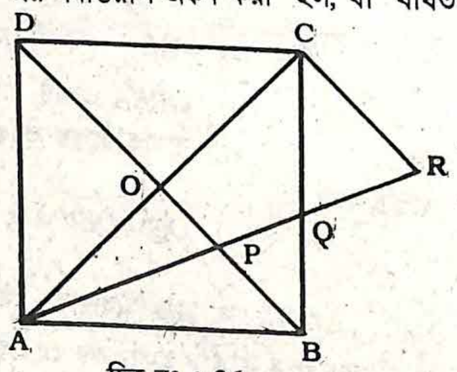
$\therefore$ F, AG-এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore$ $AF = FG = GC$ [$\because$ G, FC-এর মধ্যবিন্দু স্বীকার করে নেওয়া হয়েছে।]

$\therefore$ $AF = \frac{1}{3}AC.$

3. $ABCD$ একটি বর্গক্ষেত্র। AC ও BD কর্ণ দুটি পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক BO-কে P বিন্দুতে এবং BC-কে Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $OP = \frac{1}{2}CQ$.

অঙ্কন ঃ C বিন্দু দিয়ে OP-এর সমান্তরাল অঙ্কন করা হল, যা বর্ধিত AQ-কে R বিন্দুতে ছেদ করে।



চিত্র নং ঃ 26

প্রমাণ ঃ $\because$ O, AC-এর মধ্যবিন্দু এবং $OP \parallel CR$,

$\therefore$ ΔACR থেকে পাই, $OP = \frac{1}{2}CR$.

আবার, $\because$ $OP \parallel CR$ এবং $\angle AOP = 90^\circ$

[$\because$ বর্গক্ষেত্রের কর্ণ দুটি পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে,]

$\therefore\ \angle ACR = 90°$ [অনুরূপ কোণ] ।

$\therefore\ \Delta ACR$ ও ΔABQ-এর

$\angle ACR = \angle ABQ$ [উভয়েই 90°],

$\angle CAR = \angle BAQ$ [AQ, $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক],

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle CRQ$ = অবশিষ্ট $\angle AQB$

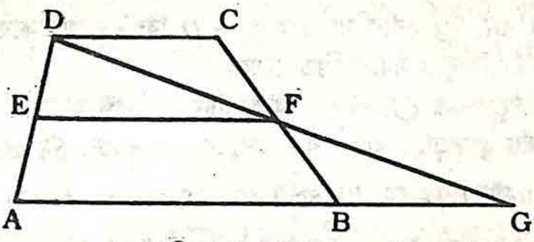
= বিপ্রতীপ $\angle CQR$.

$\therefore\ \angle CRQ = \angle CQR$.

$\therefore\ \Delta CQR$-এর $CR = CQ$

$\therefore\ OP = \frac{1}{2}CQ$ [$\because\ OP = \frac{1}{2}CR$]

4. $ABCD$ ট্রাপিজিয়মের তির্যক বাহু AD ও BC-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F. প্রমাণ কর যে, $EF \parallel AB$ এবং $EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$.



চিত্র নং ঃ 27

অঙ্কন ঃ D, F যুক্ত করে বর্ধিত করা হল, যা বর্ধিত AB-কে G বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণঃ $\because\ \Delta CFD$ ও ΔBFG-এর

$CF = BF$ [$\because F$, BC-এর মধ্যবিন্দু],

$\angle CFD$ = বিপ্রতীপ $\angle BFG$

$\angle CDF$ = একান্তর $\angle BGF$ [$\because$ $DC \parallel BG$ এবং DG ভেদক];

$\therefore\ \Delta CFD \cong \Delta BFG$

$\therefore\ DF = FG$ [অনুরূপ] ।

এবার ΔADG-এর DA ও DG বাহু দুটির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F,

$\therefore\ EF \parallel AG$ এবং $EF = \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}(AB + BG)$

$= \frac{1}{2}(AB + DC)$ [$\because\ \Delta CFD \cong \Delta BFG$].

অনুশীলনী 6

1. ΔABC-এর AB, BC ও CA বাহু তিনটির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X, Y, Z. প্রমাণ কর যে, $AXYZ$ একটি সামান্তরিক । আরও প্রমাণ কর যে, $\Delta AXZ, \Delta YZX, \Delta XBY$ ও ΔZCY সর্বসম ।

2. ΔABC-এর AB ও AC বাহু দুটির উপর যথাক্রমে D ও E বিন্দু এমনভাবে নেওয়া হল যে, $AD = \frac{1}{4}AB$ এবং $AE = \frac{1}{4}AC$. প্রমাণ কর যে, $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{4}BC$.

3. ΔABC-এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D থেকে CA ও BA-এর সমান্তরাল যথাক্রমে BA ও CA-কে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে । প্রমাণ কর যে, $EF = \frac{1}{2}BC$.

4. $PQRS$ সামান্তরিকের PQ এবং SR বাহু দুটির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে A ও B. PB ও AR, SQ কর্ণকে যথাক্রমে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে । প্রমাণ কর যে, SQ, C ও D বিন্দুতে সমত্রিখণ্ডিত হয়েছে ।

5. ΔPQR-এর QR ও QP বাহু দুটির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X ও Z. QP-কে S বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যে, $PS = ZP$. SX, PR-কে Y বিন্দুতে ছেদ করে । প্রমাণ কর যে, $PY = \frac{1}{4}PR$.

6. ΔABC-এর AB ও AC বাহু দুটির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F. C, E ও B, F যুক্ত করে যথাক্রমে X ও Y পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যে, $EX = CE$ এবং $FY = BF$. উপপাদ্য 24-এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, X, A, Y সমরেখ ।

7. কোনো চতুর্ভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি পর পর যুক্ত করে যে চতুর্ভুজটি গঠিত হয়, প্রমাণ কর যে, সেটি একটি সামান্তরিক ।

8. নিচের ধর্মগুলি পূর্বেই প্রমাণ করেছ । এবার উপপাদ্য 24-এর সাহায্যে ধর্মগুলি প্রমাণ কর ঃ

(i) কোনো সামান্তরিকের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি পর পর যুক্ত করে যে চতুর্ভুজটি পাওয়া যায়, সেটি একটি সামান্তরিক ।

(ii) কোনো আয়তক্ষেত্রের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি পর পর যুক্ত করে যে চতুর্ভুজটি গঠিত হয়, সেটি একটি রম্বস ।

(iii) কোনো রম্বসের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি পর পর যুক্ত করলে একটি আয়তক্ষেত্র গঠিত হবে ।

(iv) কোনো বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি পর পর যুক্ত করলে একটি বর্গক্ষেত্র গঠিত হবে ।

9. ΔABC-এর $\angle A$ সমকোণ। অতিভুজ BC-এর মধ্যবিন্দু D. প্রমাণ কর যে, $AD = \frac{1}{2}BC$.

10. $ABCD$ ট্রাপিজিয়মের তির্যক বাহু AD ও BC-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F. EF রেখাংশ AC ও BD কর্ণ দুটিকে যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $EG = HF$. এ থেকে প্রমাণ কর যে, $2EF = AB + DC$.

11. ΔABC-এর AB ও AC বাহু দুটির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E. CD-এর মধ্যবিন্দু P এবং BD-এর মধ্যবিন্দু Q. প্রমাণ কর যে, BE ও PQ পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে।

12. ΔABC-এর BE ও CF মধ্যমা দুটি পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করে। P ও Q যথাক্রমে BG ও CG-এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর যে, $PQEF$ একটি সামান্তরিক। এ থেকে প্রমাণ কর যে, মধ্যমা দুটির প্রত্যেকটির সমত্রিখণ্ডক বিন্দুগুলির একটি বিন্দু G.

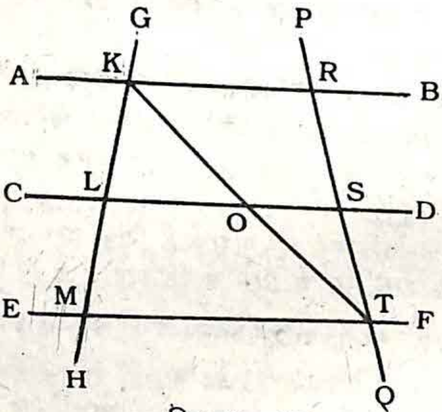
13. $ABCD$ সামান্তরিকের AB বাহুকে E বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যে, $BE = AB$. DE, AC ও BC-কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, Q, BC-এর মধ্যবিন্দু। আরও প্রমাণ কর যে, $PC = \frac{1}{2}AP$.

14. উপপাদ্য 24-কে উপপাদ্য 23-এর সাহায্য ছাড়াও প্রমাণ করা যায়, তা তোমরা দেখেছ। কাজেই উপপাদ্য 23-কেও উপপাদ্য 24-এর বিপরীত উপপাদ্য বলতে পারি। উপপাদ্য 24-এর বিপরীত উপপাদ্য হিসাবে উপপাদ্য 23-কে প্রমাণ কর।

2.4 ভেদক সংক্রান্ত উপপাদ্য :

উপপাদ্য 25

যদি তিনটি বা তার বেশি সমান্তরাল সরলরেখা যেকোনো একটি ভেদক থেকে সমান সমান অংশ খণ্ডিত করে, তাহলে তারা অপর যেকোনো ভেদক থেকেও সমান সমান অংশ খণ্ডিত করবে।



চিত্র নং : 28

আমরা প্রথমে উপপাদ্যটি যদি যেকোনো তিনটি সমান্তরাল সরলরেখা দ্বারা প্রমাণ করি, তাহলে তার বেশি সমান্তরাল সরলরেখার জন্যও প্রমাণ করা যাবে।

ধরা যাক, AB, CD, EF সমান্তরাল সরলরেখা তিনটি GH ভেদক থেকে KL, LM দুটি সমান অংশ খণ্ডিত করেছে, অর্থাৎ $KL = LM$. ঐ সরলরেখা তিনটি অপর একটি ভেদক PQ থেকে RS ও ST অংশ খণ্ডিত করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $RS = ST$.

অঙ্কন : K, T যুক্ত করা হল। মনে করি, KT, LS-কে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ : ΔKMT-এ L, KM-এর মধ্যবিন্দু (কল্পনানুসারে)

এবং $LO \parallel MT$ (কল্পনানুসারে)

$\therefore$ O, KT-এর মধ্যবিন্দু।

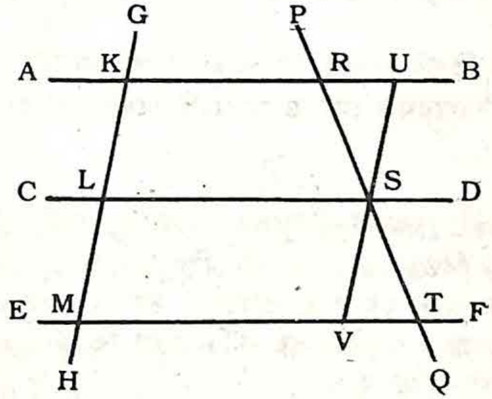
আবার, ΔTKR-এ O, TK-এর মধ্যবিন্দু (প্রমাণিত)

এবং $OS \parallel KR$ (কল্পনানুসারে),

$\therefore$ S, RT-এর মধ্যবিন্দু

অর্থাৎ, $RS = ST$.

বিকল্প প্রমাণ ঃ



চিত্র নং ঃ 29

ধরা যাক, AB, CD, EF সরলরেখা তিনটি GH থেকে KL, LM দুটি সমান অংশ খণ্ডিত করেছে ; অর্থাৎ $KL = LM$. ঐ সরলরেখা তিনটি অপর একটি ভেদক PQ থেকে RS ও ST অংশ খণ্ডিত করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $RS = ST$

অঙ্কন ঃ S বিন্দু দিয়ে GH-এর সমান্তরাল অঙ্কন করা হল, যা AB ও EF-কে যথাক্রমে U ও V বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ ঃ $KLSU$ চতুর্ভুজের

$KU \parallel LS$ (কল্পনানুসারে),

$KL \parallel US$ (অঙ্কনানুসারে),

$\therefore$ $KLSU$ একটি সামান্তরিক।

$\therefore$ $KL = US$,

অনুরূপে প্রমাণ করা যাবে যে, $LM = SV$;

কিন্তু $KL = LM$.

$\therefore$ $US = SV$

এবার, ΔSRU ও ΔSTV-এর

$\angle URS =$ একান্তর $\angle VTS$ [$\because$ $AB \parallel EF$ এবং PQ ভেদক],

$\angle USR =$ বিপ্রতীপ $\angle VST$,

$SU = SV$ (প্রমাণিত)

এবং এরা ত্রিভুজ দুটির অনুরূপ বাহু।

$\therefore$ $\Delta SRU \cong \Delta STV$

$\therefore$ $SR = ST$, অর্থাৎ $RS = ST$.

[মন্তব্য ঃ (1) লক্ষ কর, প্রথম প্রমাণটিতে উপপাদ্য 23-এর সাহায্য নেওয়া হয়েছে ; কিন্তু দ্বিতীয় প্রমাণটি উপপাদ্য 23-এর সাহায্য ছাড়াই করা হয়েছে।

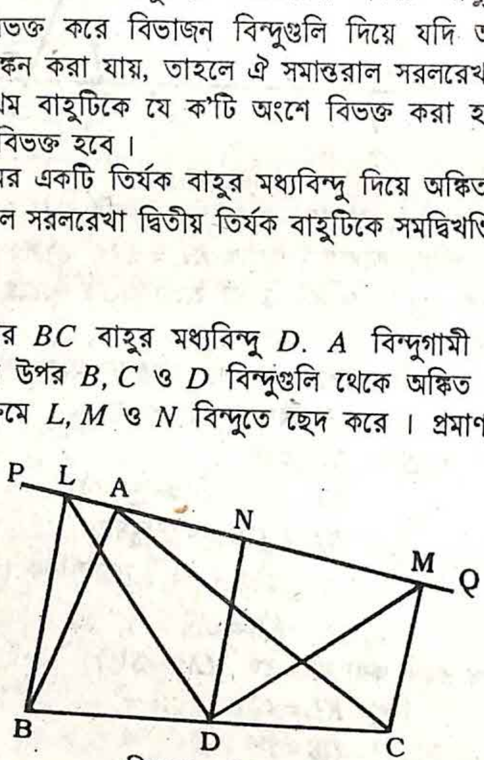
(2) ধর্মটি তিনটি সমান্তরাল সরলরেখার জন্য প্রমাণিত ধরে নিয়ে চার বা তার বেশি সরলরেখার ক্ষেত্রেও যে ধর্মটি প্রযোজ্য তা তোমরা নিজেরাই প্রমাণ কর।]

অনুসিদ্ধান্ত **1.** কোনো ত্রিভুজের যেকোনো একটি বাহুকে সমান কয়েকটি অংশে বিভক্ত করে বিভাজন বিন্দুগুলি দিয়ে যদি অপর একটি বাহুর সমান্তরাল অঙ্কন করা যায়, তাহলে ঐ সমান্তরাল সরলরেখাগুলি দ্বারা তৃতীয় বাহুটিও প্রথম বাহুটিকে যে ক'টি অংশে বিভক্ত করা হয়েছে, সেই ক'টি সমান অংশে বিভক্ত হবে।

2. ট্রাপিজিয়মের একটি তির্যক বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত সমান্তরাল বাহু দুটির সমান্তরাল সরলরেখা দ্বিতীয় তির্যক বাহুটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে।

কয়েকটি প্রয়োগ ঃ

1. ΔABC-এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D. A বিন্দুগামী যেকোনো সরলরেখা PQ-এর উপর B, C ও D বিন্দুগুলি থেকে অঙ্কিত লম্ব PQ সরলরেখাকে যথাক্রমে L, M ও N বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $DL = DM$.



চিত্র নং ঃ 30

প্রমাণ ঃ $\because$ BL, DN ও CM-এর প্রত্যেকেই PQ সরলরেখার উপর লম্ব, সুতরাং তারা পরস্পর সমান্তরাল।

$\because$ $BL \parallel DN \parallel CM$ এবং $BD = DC$,

$\therefore$ $LN = NM$,

এবার, ΔDLN ও ΔDMN-এর

$LN = MN$ (প্রমাণিত),

DN সাধারণ

এবং অন্তর্ভূত $\angle DNL$ = অন্তর্ভূত $\angle DNM$

$[\because \; DN \perp PQ]$

$\therefore \; \Delta DLN \cong \Delta DMN$

$\therefore \; DL = DM$ (অনুরূপ) ।

অনুশীলনী 7

1. AB রেখাংশের মধ্যবিন্দু C. PQ যেকোনো একটি সরলরেখা । A, B, C বিন্দুগুলি থেকে PQ-এর ন্যূনতম দূরত্ব যথাক্রমে AR, BS ও CT. প্রমাণ কর যে, $AR + BS = 2CT$.

2. ΔABC-এর AD একটি মধ্যমা । BE ও CF সরলরেখা দুটি DA-এর সমান্তরাল । AD-এর যেকোনো বিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব BE ও CF-কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে । প্রমাণ কর যে, $AP = AQ$.

3. $ABCD$ ট্রাপিজিয়মের একটি তির্যক বাহু AD-এর মধ্যবিন্দু E দিয়ে AB-এর সমান্তরাল সরলরেখা BC ও দুটি কর্ণ AC ও BD-কে যথাক্রমে F, G ও H বিন্দুতে ছেদ করে । প্রমাণ কর যে, $EG = HF$ এবং $EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$.

4. $ABCD$ একটি সামান্তরিকের বাইরে PQ যেকোনো একটি সরলরেখা । AE, BF, CG, DH যথাক্রমে A, B, C, D বিন্দুগুলি থেকে PQ-এর উপর লম্ব । $ABCD$ সামান্তরিকের কর্ণ দুটির ছেদবিন্দু O থেকে OR, PQ-এর উপর লম্ব । প্রমাণ কর যে, $AE + CG = 2OR = BF + DH$.

5. অষ্টম শ্রেণীতে একটি রেখাংশকে সমান কয়েকটি অংশে বিভক্ত করার দু'রকম পদ্ধতি শিখেছ । AB একটি রেখাংশ নিয়ে তাকে দু'রকম পদ্ধতিতেই সমান ছয়টি অংশে বিভক্ত কর । ঐ দুটি অঙ্কন পদ্ধতি প্রমাণ কর ।

6. উপপাদ্য 23-এর সাহায্য ছাড়াই যে উপপাদ্য 25 প্রমাণ করা যায়, তা তোমরা দেখেছ । এবার, উপপাদ্য 25-এর সাহায্যে উপপাদ্য 23-কে প্রমাণ কর ।

2.5 ক্ষেত্রফল ঃ

সামতলিক চিত্রের ক্ষেত্রফল সম্বন্ধে তোমাদের কিছুটা ধারণা আছে। এই ধারণাকে পূর্ণতর করতে হলে আরও কয়েকটি বিষয় সম্বন্ধে জ্ঞান থাকা প্রয়োজন। সেই বিষয়গুলি হল সামতলিক চিত্রের অঞ্চল এবং ঐ অঞ্চলের সীমা ও অভ্যন্তর।

যে বিন্দুগুলি একটি সামতলিক চিত্রের ভিতরে অবস্থিত এবং যে বিন্দুগুলি ঐ সামতলিক চিত্রের উপর অবস্থিত—সামতলিক চিত্রের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত এই বিন্দুসমষ্টিকে আমরা সামতলিক চিত্রের **অঞ্চল** বলতে পারি। সামতলিক চিত্রটিকে বলা ঐ অঞ্চলের **সীমা** এবং সামতলিক চিত্রের অন্তস্থ বিন্দুসমষ্টিকে বলা হয় ঐ অঞ্চলের **অভ্যন্তর**।

এবার আমরা যদি একটি নির্দিষ্ট মানের বর্গক্ষেত্রাকার অঞ্চলকে '1' সংখ্যাটির সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত মনে করি, তাহলে ঐ বর্গক্ষেত্রটিকে একক বর্গ বলা যেতে পারে। এবার আমরা যদি এমন একটি আয়তক্ষেত্র বিচার করি যার দৈর্ঘ্য পূর্বোক্ত বর্গক্ষেত্রের বাহুর 5 গুণ এবং প্রস্থ 3 গুণ, তাহলে ঐ আয়তক্ষেত্রের অঞ্চলে পূর্বোক্ত একক বর্গটিকে 15 বার স্থাপন করা যাবে, অর্থাৎ এই আয়তক্ষেত্রটির অঞ্চলকে '15' সংখ্যাটির সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত করা যেতে পারে ; সুতরাং এই '15' সংখ্যাটিকে আয়তক্ষেত্রটির অঞ্চলের ক্ষেত্রফল বলা যেতে পারে।

অনুরূপভাবে যেকোনো সামতলিক চিত্রের অঞ্চলের সঙ্গে নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রটি সাপেক্ষে একটি ধনাত্মক সংখ্যাকে সম্পর্কযুক্ত মনে করা যেতে পারে। ঐ সামতলিক চিত্রের অঞ্চলের সঙ্গে যে সংখ্যাটি সম্পর্কযুক্ত হল, সেই সংখ্যাটিকে নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রটি সাপেক্ষে ঐ অঞ্চলটির ক্ষেত্রফল বলা হবে।

মনে রেখ, ক্ষেত্রফল একটি মান। তোমরা আয়তক্ষেত্র এবং বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতেও শিখেছ। এবার আমরা কয়েকটি সামতলিক চিত্র —সামান্তরিক, আয়তক্ষেত্র ও ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের মধ্যে সম্পর্ক বিচার করব। তার পূর্বে ক্ষেত্রফল সম্পর্কে আর একটু আলোচনা করা যাক। কোনো একটি সামতলিক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বলতে আমরা ঐ সামতলিক ক্ষেত্রের অঞ্চলের ক্ষেত্রফলই বুঝব।

আমরা আগেই বলেছি ক্ষেত্রফল একটি মান। কিন্তু রেখাংশের দৈর্ঘ্যের মান বা কোণের মানের ধারণার সঙ্গে ক্ষেত্রফলের মানের ধারণার কিছুটা অমিল রয়েছে। দুটি রেখাংশের দৈর্ঘ্য এক হলে রেখাংশ দুটির একটির সঙ্গে আর একটিকে মেলান যাবে। কোণের ক্ষেত্রেও এ কথা প্রযোজ্য। কিন্তু ক্ষেত্রফলের পক্ষে এ কথা প্রযোজ্য নয়। দুটি চিত্রের ক্ষেত্রফল সমান হলে, সেই চিত্র দুটির একটিকে আর একটির সঙ্গে মেলান নাও যেতে পারে, অর্থাৎ চিত্র দুটি সর্বসম নাও হতে পারে ; এমন কি চিত্র দুটি একই জ্যামিতিক

চরিত্রের নাও হতে পারে ; যেমন 9 সেমি দৈর্ঘ্য ও 4 সেমি প্রস্থ বিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র, 12 সেমি দৈর্ঘ্য ও 3 সেমি প্রস্থ বিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র এবং 6 সেমি বাহু বিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একই হবে, যদিও প্রথম দুটি আয়তক্ষেত্র হলেও সর্বসম নয়, আবার তৃতীয়টি একটি আলাদা ধরনের চিত্র, কিন্তু দুটি চিত্র সর্বসম হলে, তাদের ক্ষেত্রফল সমান হবেই।

আমরা ক্ষেত্রফল সম্পর্কে নিচের ধর্মগুলি ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলি প্রমাণ করার সময় ধরে নেব ঃ

(i) সর্বসম চিত্রের ক্ষেত্রফল সমান।

(ii) দুটি সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট চিত্রের ক্ষেত্রফলের সঙ্গে একটি চিত্রের ক্ষেত্রফল যোগ করলে যোগফল সমান হবে।

(iii) দুটি সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট চিত্রের ক্ষেত্রফলের সঙ্গে দুটি সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট চিত্রের ক্ষেত্রফল যোগ করলে যোগফল সমান হবে।

(iv) একটি চিত্রের ক্ষেত্রফল থেকে দুটি সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট চিত্রের ক্ষেত্রফল বিয়োগ করলে বিয়োগফল সমান হবে।

(v) দুটি সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট চিত্রের প্রত্যেকটির ক্ষেত্রফল থেকে একটি চিত্রের ক্ষেত্রফল বিয়োগ করলে বিয়োগফল সমান হবে।

(vi) দুটি সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট চিত্রের প্রত্যেকটির ক্ষেত্রফল থেকে দুটি সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট চিত্রের ক্ষেত্রফল বিয়োগ করলে বিয়োগফল সমান হবে।

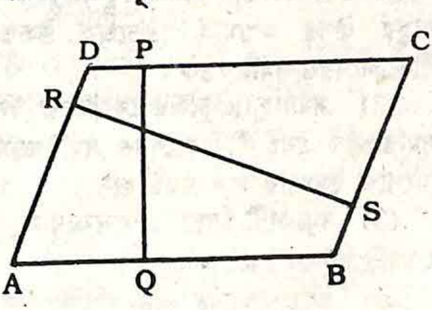
(vii) একটি চিত্রকে দুটি অংশে বিভক্ত করলে সেই দুটি অংশের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি সম্পূর্ণ চিত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হবে।

(viii) দুটি চিত্রের একটি আর একটির অংশ হলে অংশটির ক্ষেত্রফল সম্পূর্ণ চিত্রটির ক্ষেত্রফল থেকে কম হবে।

ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলি আলোচনার পূর্বে আমরা আরও কয়েকটি সংজ্ঞা জেনে নেব।

1. সামান্তরিকের উচ্চতা ঃ

সামান্তরিকের যেকোনো দুটি সমান্তরাল বাহুর মধ্যেকার দূরত্বকে সামান্তরিকের উচ্চতা বলব। তখন ঐ বাহু দুটির যে কোনোটিকে ভূমি ধরব।



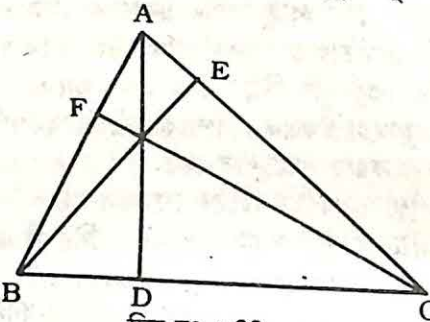
চিত্র নং ঃ 31

চিত্র নং 31-এ *ABCD* সামান্তরিকের *AB* বা *DC* ভূমিহলে, *PQ* উচ্চতা এবং *AD* বা *BC*-এর যেকোনটিকে ভূমি ধরলে *RS* উচ্চতা।

2. ত্রিভুজের উচ্চতা ঃ

ত্রিভুজের যেকোনো বাহু থেকে তার বিপরীত শীর্ষ-বিন্দুর দূরত্বকে ত্রিভুজের উচ্চতা বলব।

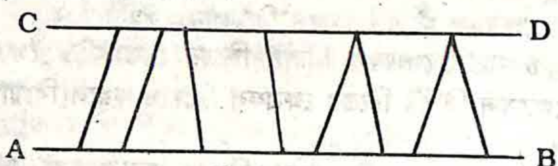
অর্থাৎ ত্রিভুজের কোন শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব-দৈর্ঘ্যকে ত্রিভুজের উচ্চতা বলব। ঐ বাহুকে ভূমি ধরে নেব। ত্রিভুজের যেকোনো বাহুকেই ভূমি ধরে নেওয়া যেতে পারে।



চিত্র নং ঃ 32

চিত্র নং 32-এ ABC ভূমি হলে AD উচ্চতা, CA ভূমি হলে BE উচ্চতা এবং AB ভূমি হলে CF উচ্চতা।

আরও লক্ষ কর যে নিচের চিত্রের সামান্তরিক বা ত্রিভুজগুলি একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত।



চিত্র নং ঃ 33

এক্ষেত্রে সামান্তরিকগুলি ও ত্রিভুজগুলির উচ্চতা একই (যদি সমান্তরাল সরলরেখার উপর অবস্থিত বাহুগুলিকে ভূমি ধরে নেওয়া হয়)। ঐ উচ্চতা সমান্তরাল সরলরেখা AB ও AD-এর মধ্যেকার দূরত্বের সমান।

[মন্তব্য ঃ (1) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের অসমান বাহুটিকে ভূমি ধরলে ঐ বাহুর উপর মধ্যমাই ত্রিভুজের উচ্চতা, যা ভূমির সমদ্বিখণ্ডক এবং শীর্ষকোণেরও সমদ্বিখণ্ডক।

(2) সমবাহু ত্রিভুজের যেকোনো মধ্যমাই ত্রিভুজের উচ্চতা, যা ভূমির সমদ্বিখণ্ডক এবং শীর্ষকোণেরও সমদ্বিখণ্ডক। সমবাহু ত্রিভুজের প্রতিটি বাহু সাপেক্ষে উচ্চতার মান একই হবে।

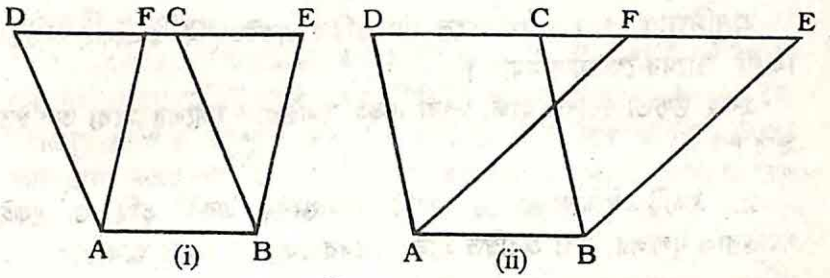
(3) সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন দুটি বাহুর একটিকে ভূমি ধরলে অপরটি উচ্চতা হবে।

(4) আয়তক্ষেত্রের দুটি সন্নিহিত বাহুর একটিকে ভূমি ধরলে অপরটি উচ্চতা হবে।

2.6 ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত উপপাদ্য ঃ

উপপাদ্য 26

যে সকল সামান্তরিক একই ভূমি ও একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত, তাদের ক্ষেত্রফল সমান ।



চিত্র নং ঃ 34

ধরা যাক, সামান্তরিক $ABCD$ ও সামান্তরিক $ABEF$ একই ভূমি AB এবং একই সমান্তরাল যুগল AB ও DE-এর মধ্যে অবস্থিত ।

প্রমাণ করতে হবে যে, সামান্তরিক $ABCD =$ সামান্তরিক $ABEF$.

প্রমাণ ঃ সামান্তরিক $ABCE$-এর AD ও BC বিপরীত বাহু,

$\therefore$ AD ও BC সমান্তরাল এবং DE ভেদক ;

$\therefore$ $\angle BCE =$ অনুরূপ $\angle ADF$.

আবার সামান্তরিক $ABEF$-এর AF ও BE বিপরীত বাহু,

$\therefore$ AF ও BE সমান্তরাল এবং DE ভেদক ;

$\therefore$ $\angle BEC =$ অনুরূপ $\angle AFD$.

এবার, ΔBEG ও ΔAFD-এর

$\angle BCE = \angle ADF$ (প্রমাণিত),

$\angle BEC = \angle AFD$ (প্রমাণিত),

$BE = AF$ (সামান্তরিকের বিপরীত বাহু),

$\therefore$ $\Delta BEC \cong \Delta AFD$.

$\therefore$ $\Delta BEC = \Delta AFD$.

$\therefore$ চতুর্ভুজ $ABED - \Delta BEC$

$=$ চতুর্ভুজ $ABED - \Delta AFD$.

$\therefore$ সামান্তরিক $ABCD =$ সামান্তরিক $ABEF$.

[মন্তব্য : প্রথম চিত্রের ক্ষেত্রে চতুর্ভুজ $ABCF$-এর ক্ষেত্রফলের সঙ্গে ΔBEC ও ΔAFD-এর ক্ষেত্রফল যোগ করেও সামান্তরিক দুটির ক্ষেত্রফল সমান প্রমাণ করা যেত। কিন্তু দ্বিতীয় ক্ষেত্রে সেভাবে প্রমাণ করা যেত না। তাই উভয় ক্ষেত্রে প্রযোজ্য পদ্ধতি হিসাবে সম্পূর্ণ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল থেকে ত্রিভুজ দুটির ক্ষেত্রফল বিয়োগ করা হল।]

অনুসিদ্ধান্ত : **1.** যে সকল সামান্তরিক একই ভূমি ও একই উচ্চতা বিশিষ্ট, তাদের ক্ষেত্রফল সমান।

একই উচ্চতা বিশিষ্ট হলে, তারা একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত হবে।

2. একটি আয়তক্ষেত্র ও একটি সামান্তরিক একই ভূমি ও একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত হলে, তাদের ক্ষেত্রফল সমান হবে।

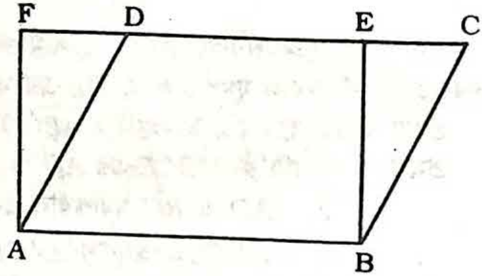
3. একটি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা

সামান্তরিক $ABCD$

= আয়তক্ষেত্র $ABEF$,

কিন্তু আয়তক্ষেত্র $ABEF$-এর ক্ষেত্রফল $= AB.\,BE.$

∴ সামান্তরিক $ABCD$-এর ক্ষেত্রফল $= AB.\,BE.$



চিত্র নং : 35

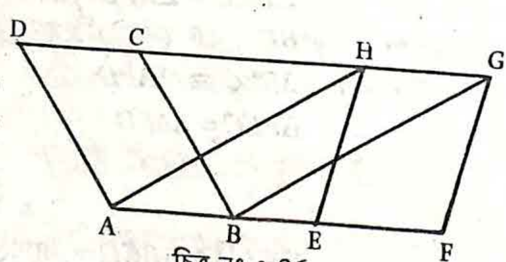
কিন্তু BE, AB ভূমি সাপেক্ষে সামান্তরিকের উচ্চতা,

∴ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা।

4. সমান সমান ভূমি ও একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত দুটি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল সমান।

$ABCD$ ও $EFGH$ সামান্তরিক দুটির ভূমি AB ও EF সমান এবং তারা AF ও DG সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ করতে হবে যে তাদের ক্ষেত্রফল সমান।



চিত্র নং : 36

প্রমাণ : ধরা যাক, সমান্তরাল যুগলের মধ্যেকার দূরত্ব, অর্থাৎ, সামান্তরিক দুটির প্রত্যেকটির উচ্চতা h.

$$\text{তাহলে } \square ABCD = AB.h$$
$$= EF.h \quad [\because AB = EF]$$
$$= \square EFGH$$

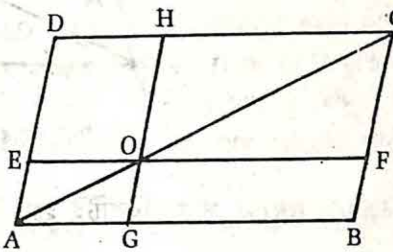
কয়েকটি প্রয়োগ ঃ

1. $ABCD$ সামান্তরিকের AC কর্ণের উপর O যেকোনো একটি বিন্দু। O বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত AB-এর সমান্তরাল সরলরেখা AD ও BC-কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে এবং O বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত AD-এর সমান্তরাল সরলরেখা AB ও DC-কে যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, সামান্তরিক $BGOF$ = সামান্তরিক $DEOH$.

প্রমাণ ঃ $EF \parallel AB \parallel DC$ এবং $AD \parallel GH \parallel BC$,

$\therefore$ $AGOE$, $BGOF$, $CFOH$ এবং $DEOH$-এর প্রত্যেকেই সামান্তরিক।

$ABCD$ সামান্তরিকের AC কর্ণ,



চিত্র নং ঃ 37

$\therefore \quad \Delta ABC \cong \Delta ADC.$

$\therefore \quad \Delta ABC = \Delta ADC$

অনুরূপভাবে, $\Delta AGO = \Delta AEO$,

এবং $\Delta OFC = \Delta OHC$,

$\therefore \quad \Delta ABC - \Delta AGO - \Delta OFC$
$= \Delta ADC - \Delta AEO - \Delta OHC.$

$\therefore$ সামান্তরিক $BGOF$ = সামান্তরিক $DEOH$.

[মন্তব্য ঃ (1) সামান্তরিক $AGOE$ ও সামান্তরিক $CFOH$-কে AC কর্ণের পার্শ্ববর্তী সামান্তরিক এবং সামান্তরিক $BGOF$ ও সামান্তরিক $DEOH$-এর প্রত্যেকটিকে তাদের পূরক বলা হয়।

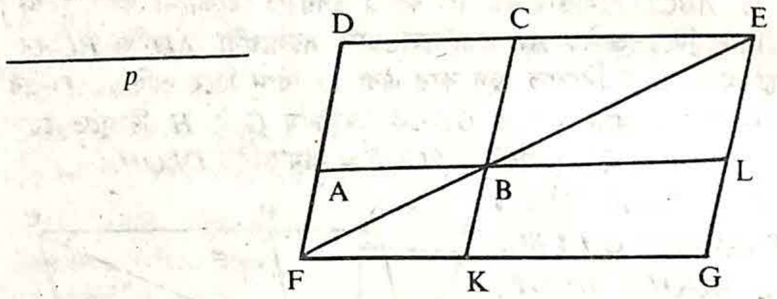
এ থেকে আমরা অনুশীলনীটিকে এভাবেও বলতে পারি ঃ

যেকোনো সামান্তরিকের কোনো কর্ণের পার্শ্ববর্তী সামান্তরিক দুটির পূরক দুটির ক্ষেত্রফলও সমান।

(2) আমরা এ ধর্মটি ব্যবহার করে যেকোনো সামান্তরিকের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কন করতে পারি, যার একটি বাহু দেওয়া আছে।

মনে করি, $ABCD$ একটি সামান্তরিক। ঐ সামান্তরিকের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কন করতে হবে, যার একটি বাহুর দৈর্ঘ্য p-রেখাংশের দৈর্ঘ্যের সমান।

অঙ্কন প্রণালী ঃ DC-কে E বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হল যেন $CE = p$. E, B-কে যুক্ত করে বর্ধিত করা হল, যা বর্ধিত DA-কে F বিন্দুতে ছেদ করে। $FDEG$ সামান্তরিকটি গঠন করা হল। বর্ধিত AB, GE-কে L বিন্দুতে এবং বর্ধিত CB, FG-কে K বিন্দুতে ছেদ করে।



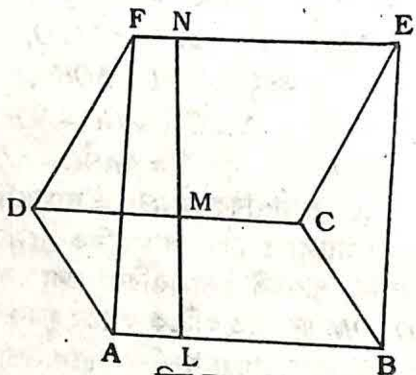
চিত্র নং ঃ 38

তাহলে $BKGL$ সামান্তরিকটিই হবে উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।]

2. $ABCD$ ও $ABEF$ সামান্তরিক দুটি AB-এর একই পার্শ্বে অবস্থিত এবং সামান্তরিক $ABEF$-এর ক্ষেত্রফল, সামান্তরিক $ABCD$-এর ক্ষেত্রফলের চেয়ে বেশি। প্রমাণ কর যে,

(i) $DCEF$ একটি সামান্তরিক,

(ii) সামান্তরিক $ABEF$ − সামান্তরিক $ABCD$ = সামান্তরিক $DCEF$.



চিত্র নং ঃ 39

প্রমাণ ঃ (i) $EF =$ ও $\parallel AB$ ($\because$ $ABEF$ সামান্তরিক)

আবার $EF =$ ও $\parallel DC$

($\because$ $ABCD$ সামান্তরিক)

$\therefore$ $DCEF$ সামান্তরিক।

(ii) ধরা যাক, AB, DC, FE এই তিনটি সমান্তরাল সরলরেখার একটি সাধারণ লম্ব ভেদক ঐ তিনটি সরলরেখাকে যথাক্রমে L, M, N বিন্দুতে ছেদ করেছে। তাহলে $ABCD$ সামান্তরিকের উচ্চতা LM, $ABEF$-এর LN এবং $DCEF$-এর MN.

$$\therefore \quad \square ABEF - \square ABCD = AB \,.\, LN - AB \,.\, LM.$$
$$= AB\,(LN - LM)$$
$$= DC \,.\, MN \;(\because\; AB = DC)$$
$$= \square DCEF.$$

অনুশীলনী 8

1. $ABCD$ সামান্তরিকের AB ও DC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q. প্রমাণ কর যে, *(i)* $APCQ$ একটি সামান্তরিক

এবং *(ii)* সামান্তরিক $APCQ = \frac{1}{2}$ সামান্তরিক $ABCD$.

2. *(i)* $ABCD$ সামান্তরিকের AD বাহুর উপর P যেকোনো একটি বিন্দু। C বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত BP-এর সমান্তরাল সরলরেখা বর্ধিত AD-কে Q বিন্দুতে এবং Q বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত PC-এর সমান্তরাল সরলরেখা বর্ধিত BC-কে R বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $CPQR$ চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক, যার ক্ষেত্রফল $ABCD$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের সমান।

(ii) উপরের বর্ণিত চিত্রে বর্ধিত RQ যদি বর্ধিত BP-কে S বিন্দুতে ছেদ করে, তাহলে প্রমাণ কর যে, সামান্তরিক $CPSQ =$ সামান্তরিক $ABCD$.

3. ΔABC-এর BC, CA ও AB বাহু তিনটির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F. আবার ΔDEF-এর EF, FD ও DE বাহু তিনটির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে K, L, M. KL ও KM, BC-কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, চতুর্ভুজ $CEKQ =$ চতুর্ভুজ $BFKP$.

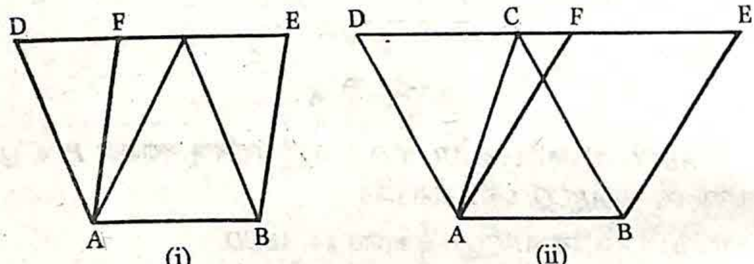
4. $ABCD$ ও $ABEF$ সামান্তরিক দুটি AB-এর বিপরীত পার্শ্বে এমনভাবে অবস্থিত যে D, A, F বিন্দু তিনটি সমরেখ নয়। প্রমাণ কর যে, $DCEF$ একটি সামান্তরিক এবং সামান্তরিক $ABCD +$ সামান্তরিক $ABEF =$ সামান্তরিক $DCEF$.

5. $ABCD$ রম্বসের AB ও DC বাহু দুটির মধ্যে দূরত্ব PQ এবং AD ও BC বাহু দুটির মধ্যে দূরত্ব RS. প্রমাণ কর যে, $PQ = RS$.

6. প্রমাণ কর যে, $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $ABEF$ রম্বসের ক্ষেত্রফলের চেয়ে বেশি।

উপপাদ্য 27

কোনো ত্রিভুজ ও কোনো সামান্তরিক একই ভূমি ও একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত হলে, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হবে।



চিত্র নং : 40

ধরা যাক, ΔABC ও সামান্তরিক $ABDE$ একই ভূমি AB ও একই সমান্তরাল যুগল AB ও ED [চিত্র নং 40 (i)] বা AB ও CD [চিত্র নং 40 (ii)]-এর মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta ABC = \frac{1}{2}$ সামান্তরিক $ABDE$.

অঙ্কন : A বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত BC-এর সমান্তরাল সরলরেখা DC-কে F বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : $\because$ $AF \parallel BC$ (অঙ্কনানুসারে)

এবং $AB \parallel FC$ (কল্পনানুসারে),

$\therefore$ $ABCF$ একটি সামান্তরিক।

$\because$ সামান্তরিক $ABDE$ ও সামান্তরিক $ABCF$ একই ভূমি AB এবং একই সমান্তরাল যুগল AB ও FD-এর মধ্যে অবস্থিত,

$\therefore$ সামান্তরিক $ABDE$ = সামান্তরিক $ABCF$.

আবার সামান্তরিক $ABCF$-এর AC কর্ণ,

$\therefore$ $\Delta ABC = \frac{1}{2}$ সামান্তরিক $ABCF$

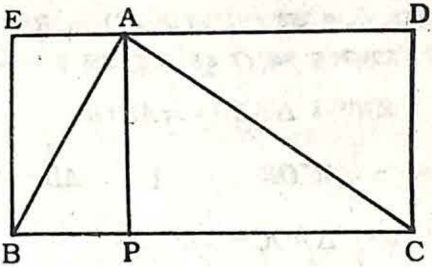
$= \frac{1}{2}$ সামান্তরিক $ABDE$.

[**মন্তব্য :** C বিন্দু দিয়ে EA বা DB-এর সমান্তরাল অঙ্কন করেও উপপাদ্যটি প্রমাণ করা যেত, তবে দুটি চিত্রের ক্ষেত্রে যুক্তি একটু আলাদা হতো। এভাবে উপপাদ্যটি প্রমাণ কর তো।]

অনুসিদ্ধান্ত ঃ 1. কোনো ত্রিভুজ ও কোনো সামান্তরিক একই ভূমি ও একই উচ্চতা বিশিষ্ট হলে, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হবে।

সমান উচ্চতা বিশিষ্ট হলে তারা একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত হবে, সুতরাং ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হবে।

2. কোনো ত্রিভুজ ও কোনো আয়তক্ষেত্র একই ভূমি ও একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত হলে, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হবে।



চিত্র নং ঃ 41

3. যেকোনো ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ ভূমি × উচ্চতা। ΔABC ও আয়তক্ষেত্র $BCDE$ একই ভূমি BC এবং একই সমান্তরাল যুগল BC ও ED-এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore \quad \Delta ABC$

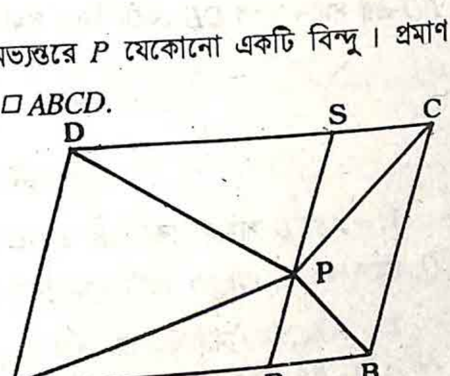
$= \frac{1}{2}$ আয়তক্ষেত্র $BCDE$

$= \frac{1}{2} BC \,.\, CD = \frac{1}{2} BC.AP$ [$\because$ $APCD$ একটি আয়তক্ষেত্র]।

4. কোনো ত্রিভুজ ও কোনো সামান্তরিক সমান সমান ভূমি ও একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত হলে, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হবে।

কয়েকটি প্রয়োগ ঃ

1. $ABCD$ সামান্তরিকের অভ্যন্তরে P যেকোনো একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $\Delta APD + \Delta BPC = \frac{1}{2} \square ABCD$.



চিত্র নং ঃ 42

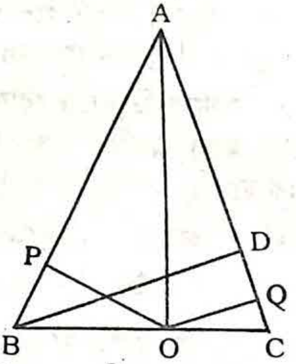
অঙ্কন ঃ P বিন্দু দিয়ে BC-এর সমান্তরাল অঙ্কন করা হল, যা AB ও DC বাহুকে যথাক্রমে R ও S বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ ঃ ΔAPD $= \frac{1}{2} \square ARSD$ ($\because$ একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত)।

অনুরূপভাবে $\Delta BPC = \frac{1}{2} \square BRSC$.

$\therefore \quad \Delta APD + \Delta BPC = \frac{1}{2}(\square ARSD + \square BRSC) = \frac{1}{2} \square ABCD$.

2. ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, যার $AB = AC$. BC-এর উপর O যেকোনো একটি বিন্দু। O বিন্দু থেকে AB ও AC-এর লম্বদৈর্ঘ্য যথাক্রমে OP ও OQ. B বিন্দু থেকে AC-এর লম্বদৈর্ঘ্য BD. প্রমাণ কর যে, $OP + OQ = BD$.



চিত্র নং : 43

অঙ্কন : A, O যুক্ত করা হল।

প্রমাণ : $\Delta AOB = \frac{1}{2} AB.OP$

$= \frac{1}{2} AC.OP \qquad [\because \; AB = AC]$

এবং $\Delta AOC = \frac{1}{2} AC.OQ$

$\therefore \quad \Delta AOB + \Delta AOC = \frac{1}{2} AC.(OP + OQ)$,

আবার, $\Delta ABC = \frac{1}{2} AC.BD$

$\because \quad \Delta ABC = \Delta AOB + \Delta AOC$,

$\therefore \quad \frac{1}{2} AC.BD = \frac{1}{2} AC.(OP + OQ)$.

$\therefore \quad BD = OP + OQ$.

[মন্তব্য : ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সূত্র ব্যবহার না করে DB থেকে PO-এর সমান অংশ DE কেটে নিয়ে প্রমাণ করার চেষ্টা কর তো।]

অনুশীলনী 9

1. $ABCD$ সামান্তরিকের AB ও DC বাহু দুটির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q. প্রমাণ কর যে, $PBQD$ একটি সামান্তরিক এবং $\Delta PBC = \frac{1}{2} \square PBQD$.

2. $ABCD$ ট্রাপিজিয়মের AB ও DC বাহু দুটি সমান্তরাল এবং $AB > DC$. BA থেকে CD-এর সমান করে BE অংশ কেটে নেওয়া হল। প্রমাণ কর যে, $\Delta ACD = \frac{1}{2}$ চতুর্ভুজ $BCDE$.

3. সমবাহু ত্রিভুজের অভ্যন্তরস্থ কোনো বিন্দু থেকে বিপরীত বাহুগুলির উপর অঙ্কিত লম্বদৈর্ঘ্যগুলির সমষ্টি ত্রিভুজের উচ্চতার সমান–প্রমাণ কর।

4. ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, যার $AB = AC$. বর্ধিত BC-এর উপর P যেকোনো একটি বিন্দু। P বিন্দু থেকে AB ও AC-এর লম্বদৈর্ঘ্য যথাক্রমে PQ ও PR. B বিন্দু থেকে AC-এর লম্বদৈর্ঘ্য BS. প্রমাণ কর যে, $PQ - PR = BS$.

5. ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং O বিন্দুটি ত্রিভুজের বহিঃস্থ এবং ABC কৌণিক অঞ্চলে অবস্থিত। OP, OQ ও OR যথাক্রমে O বিন্দু থেকে AB, BC ও CA সরলরেখাগুলির লম্বদৈর্ঘ্য। প্রমাণ কর যে,

ত্রিভুজের উচ্চতা = $OP + OQ - OR$.

6. $ABCD$ সামান্তরিকের AB বাহুর সমান্তরাল একটি সরলরেখাকে AD, AC ও BC বা তাদের বর্ধিত অংশ যথাক্রমে E, F, G বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $\Delta AEG = \Delta AFD$.

7. $ABCD$ সামান্তরিকের DC বাহুর উপর E যেকোনো একটি বিন্দু। বর্ধিত AE বর্ধিত BC-কে F বিন্দুতে ছেদ করে। D, F যুক্ত করা হল। প্রমাণ কর যে, (i) $\Delta ADF = \Delta ABE$, (ii) $\Delta DEF = \Delta BEC$.

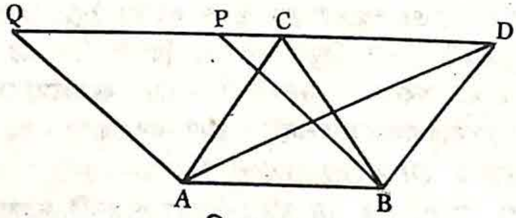
8. $ABCD$ সামান্তরিকের বহিঃস্থ O একটি বিন্দু যা বর্ধিত AB ও বর্ধিত DC-এর মধ্যবর্তী অঞ্চলে অবস্থিত। প্রমাণ কর যে,

(i) $\Delta AOD - \Delta BOC = \frac{1}{2} \square ABCD$,

(ii) $\Delta AOD = \Delta AOB + \Delta COD + \Delta BOC$.

উপপাদ্য 28

একই ভূমি ও একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফল সমান।



চিত্র নং ঃ 44

ধরা যাক, ΔABC ও ΔABD একই ভূমি AB ও একই সমান্তরাল যুগল AB ও CD-এর মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta ABC = \Delta ABD$.

অঙ্কন ঃ AB-কে ভূমি করে এবং AB ও CD সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত একটি সামান্তরিক $ABPQ$ অঙ্কন করা হল।

প্রমাণ ঃ $\because$ ΔABC ও সামান্তরিক $ABPQ$ একই ভূমি AB ও একই সমান্তরাল যুগল AB ও PQ-এর মধ্যে অবস্থিত,

$\therefore \quad \Delta ABC = \frac{1}{2}$ সামান্তরিক $ABPQ$.

অনুরূপে, $\Delta ABD = \frac{1}{2}$ সামান্তরিক $ABPQ$.

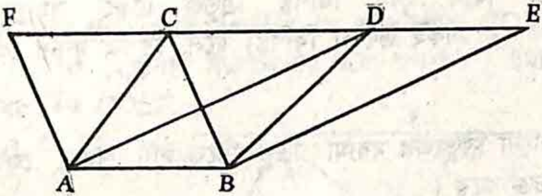
$\therefore \quad \Delta ABC = \Delta ABD$.

[**মন্তব্য ঃ** যেহেতু একই ভূমি ও একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত কোনো ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সঙ্গে কোনো সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের সম্পর্ক আমাদের জানা আছে ; সেজন্যই সামান্তরিক $ABPQ$ অঙ্কন করা হল।]

বিকল্প প্রমাণ ঃ

ধরা যাক, ΔABC ও ΔABD একই ভূমি AB এবং একই সমান্তরাল যুগল AB ও CD-এর মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta ABC = \Delta ABD$.



চিত্র নং : 45

অঙ্কন : *B* বিন্দু দিয়ে *AD*-এর সমান্তরাল অঙ্কন করা হল, যা বর্ধিত *CD*-কে *E* বিন্দুতে ছেদ করে এবং *A* বিন্দু দিয়ে *BC*-এর সমান্তরাল অঙ্কন করা হল, যা বর্ধিত *DC*-কে *F* বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ: $AB \parallel CD$, অর্থাৎ $AB \parallel DE$ (কল্পনানুসারে)

এবং $AD \parallel BE$ (অঙ্কনানুসারে),

$\therefore$ *ABED* একটি সামান্তরিক।

অনুরূপে, *ABCF*-ও একটি সামান্তরিক।

$\because$ সামান্তরিক *ABED* ও সামান্তরিক *ABCF* একই ভূমি *AB* ও একই সমান্তরাল যুগল *AB* ও *FE*-এর মধ্যে অবস্থিত,

$\therefore \quad \square ABED = \square ABCF.$

আবার, সামান্তরিক *ABED*-এর *BD* কর্ণ,

$\therefore \quad \Delta ABD = \frac{1}{2} \square ABDE.$

অনুরূপে, $\Delta ABC = \frac{1}{2} \square ABCF.$

$\therefore \quad \Delta ABC = \Delta ABD \qquad (\because \ \square ABDE = \square ABCF).$

[মন্তব্য : (1) এ প্রমাণটি উপপাদ্য 27-এর সাহায্য ছাড়াই করা হল।

(2) আমরা আগেই জেনেছি যে, কর্ণ সামান্তরিককে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং একই ভূমি ও একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত দুটি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল সমান, সেজন্যই সমান্তরালগুলি অঙ্কন করা হল।]

অনুসিদ্ধান্ত : 1. একই ভূমি ও একই উচ্চতা বিশিষ্ট দুটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সমান।

একই উচ্চতা বিশিষ্ট হওয়ায়, তারা একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত হবে।

2. দুটি সমান ভূমি বিশিষ্ট ত্রিভুজ একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত (বা একই উচ্চতা বিশিষ্ট) হলে, ত্রিভুজ দুটির ক্ষেত্রফল সমান হবে।

3. কোনো ত্রিভুজের মধ্যমা ত্রিভুজটিকে দুটি সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

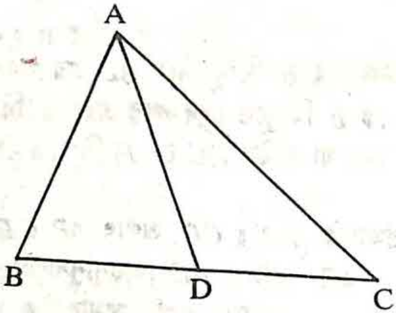
ΔABC-এর AD মধ্যমা।

$\therefore BD = DC$,

BD, DC ভূমির উপর ΔABD ও ΔACD-এর উচ্চতা সমান,

$\therefore \Delta ABD$ ও ΔADC সমান ভূমি ও একই উচ্চতা বিশিষ্ট,

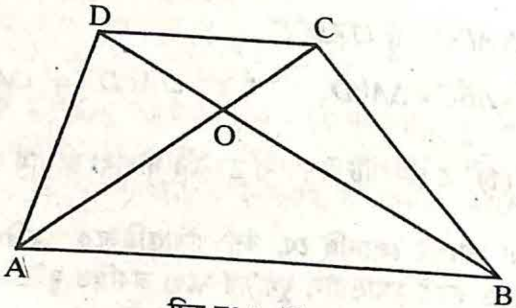
$\therefore \Delta ABD = \Delta ACD$.



চিত্র নং ঃ 46

কয়েকটি প্রয়োগঃ

1. ABCD একটি ট্রাপিজিয়ম, যার AB ও DC বাহু দুটি সমান্তরাল। AC ও BD কর্ণ পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $\Delta AOD = \Delta BOC$.



চিত্র নং ঃ 47

প্রমাণ ঃ ΔABD ও ΔABC একই ভূমি AB এবং একই সমান্তরাল যুগল AB ও DC-এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore \quad \Delta ABD = \Delta ABC$.

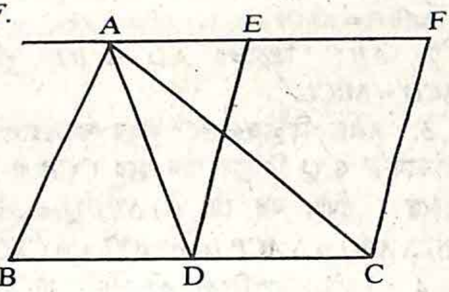
$$\therefore \quad \Delta ABD - \Delta AOB = \Delta ABC - \Delta AOB.$$

$$\therefore \quad \Delta AOD = \Delta BOC.$$

2. ΔABC-এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D. সামান্তরিক $CDEF$, BC ও A বিন্দুগামী BC-এর সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে অবস্থিত। প্রমাণ কর যে, $\Delta ABC =$ সামান্তরিক $CDEF$.

অঙ্কন : A, D যুক্ত করা হল।

প্রমাণ : $\because \Delta ADC$ ও সামান্তরিক $CDEF$ একই ভূমি DC এবং একই সমান্তরাল যুগল DC ও AF-এর মধ্যে অবস্থিত,



চিত্র নং : 48

$\therefore \quad \Delta ADC = \frac{1}{2}$ সামান্তরিক $CDEF$.

আবার $\because \quad AD, \Delta ABC$-এর মধ্যমা,

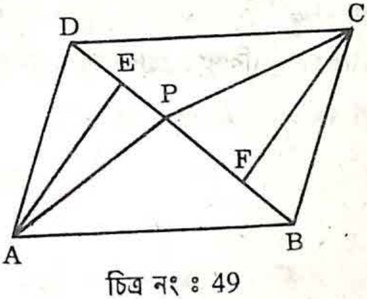
$\therefore \quad \Delta ADC = \frac{1}{2} \Delta ABC$

$\therefore \quad \Delta ABC =$ সামান্তরিক $CDEF$.

3. $ABCD$ সামান্তরিকের AD কর্ণের উপর P যেকোনো একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $\Delta APD = \Delta CPD$.

অঙ্কন : A ও C বিন্দু দুটি থেকে BD-এর উপর লম্ব অঙ্কন করা হল, যারা BD-কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণঃ ΔADE ও ΔCBF-এর



চিত্র নং : 49

$\angle ADE =$ একান্তর $\angle CBF$ [$\because AD \parallel BC$],

$\angle AED = \angle CFB$ [প্রত্যেকেই সমকোণ]

$AD = BC$ [সামান্তরিকের বিপরীত বাহু];

$\therefore \quad \Delta ADE \cong \Delta CBF. \quad \therefore \quad AE = CF$ (অনুরূপ বাহু)।

এবার, ΔAPD ও ΔCPD একই ভূমি DP-এর উপর অবস্থিত এবং একই উচ্চতাবিশিষ্ট, কারণ $AE = CF$.

$\therefore \quad \Delta APD = \Delta CPD.$

[মন্তব্য : লম্ব দুটি না অঙ্কন করে AC কর্ণ অঙ্কন করেও এটি প্রমাণ করা যেত। চেষ্টা করে দেখ তো।]

অনুশীলনী 10

1. ABC ত্রিভুজের AD মধ্যমার উপর P যেকোনো একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $\Delta ABP = \Delta ACP$.

2. ABC ত্রিভুজের AD ও BE দুটি মধ্যমা। প্রমাণ কর যে, $\Delta ACD = \Delta BCE$.

3. ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। CP ও BQ পরস্পরকে X বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ কর যে, (i) $\Delta BPQ = \Delta CPQ$ (ii) $\Delta BCP = \Delta BCQ$ (iii) $\Delta ABQ = \Delta ACP$ (iv) $\Delta BXP = \Delta CXQ$.

4. একটি সামান্তরিকের কর্ণ দুটি সামান্তরিককে চারটি সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

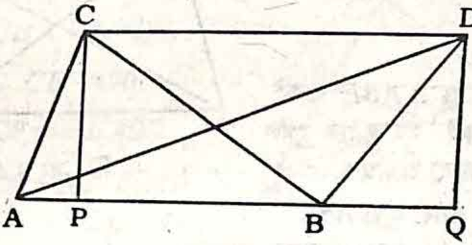
5. $ABCD$ একটি চতুর্ভুজ। C বিন্দু দিয়ে DB কর্ণের সমান্তরাল অঙ্কন করা হল, যা বর্ধিত AB-কে E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, চতুর্ভুজ $ABCD = \Delta ADE$.

6. $ABCD$ চতুর্ভুজের BD কর্ণের মধ্যবিন্দু P. প্রমাণ কর যে, A, P ও C, P যুক্ত করলে যে চতুর্ভুজটি গঠিত হয়, তার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ চর্তুর্ভুজ $ABCD$.

7. ΔABC-এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D এবং DC-এর উপর P যেকোনো একটি বিন্দু। P, A যুক্ত করে D বিন্দু দিয়ে PA-এর সমান্তরাল অঙ্কন করা হল, যা AB-কে Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $\Delta ADQ = \Delta PDQ$. এ থেকে প্রমাণ কর যে, $\Delta BPQ = \frac{1}{2} \Delta ABC$.

উপপাদ্য 29

সমান সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজগুলি একই ভূমির উপর এবং ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত হলে, তারা একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত হবে।



চিত্র নং ঃ 50

ধরা যাক, ΔABC ও ΔABD-এর ক্ষেত্রফল সমান এবং তারা AB-এর একই পার্শ্বে অবস্থিত। C, D যুক্ত করা হল।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB \parallel CD$.

অঙ্কন ঃ C ও D বিন্দু থেকে AB-এর উপর লম্ব অঙ্কন করা হল, যারা AB বা বর্ধিত AB-কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ ঃ $\Delta ABC = \frac{1}{2} AB.CP$ ($\because$ AB ভূমি, CP উচ্চতা)

এবং $\Delta ABD = \frac{1}{2} AB.DQ$ ($\because$ AB ভূমি, DQ উচ্চতা)

$\because \quad \Delta ABC = \Delta ABD$

$\therefore \quad \frac{1}{2} AB.CP = \frac{1}{2} AB.DQ$

$\therefore \quad CP = DQ$.

আবার, $CP \parallel DQ$ ($\because$ একই সরলরেখার উপর লম্ব),

$\therefore$ $CPQD$ একটি সামান্তরিক।

$\therefore \quad CD \parallel PQ$,

অর্থাৎ $CD \parallel AB$

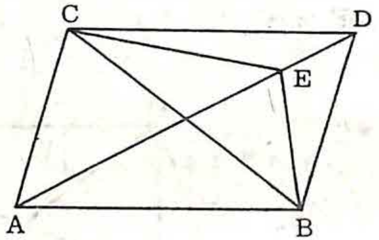
বিকল্প প্রমাণ ঃ

ধরা যাক, ΔABC ও ΔABD-এর ক্ষেত্রফল সমান এবং তারা AB-এর একই পার্শ্বে অবস্থিত। C, D যুক্ত করা হল।

প্রমাণ করতে হবে যে,

$AB \parallel CD$.

প্রমাণ ঃ মনে করি CD, AB-এর সমান্তরাল নয়। তাহলে C বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত AB-এর সমান্তরাল সরলরেখা AD-কে বা বর্ধিত AD-কে ছেদ করবে। ধরা যাক, তা AD-কে E বিন্দুতে ছেদ করে। B, E যুক্ত করা হল।



চিত্র নং ঃ 51

$\because$ ΔABC ও ΔABE একই ভূমি AB ও একই সমান্তরাল যুগল AB ও CE-এর মধ্যে অবস্থিত,

$\therefore \quad \Delta ABC = \Delta ABE$;

কিন্তু $\Delta ABC = \Delta ABD$ (কল্পনানুসারে),

$\therefore \quad \Delta ABD = \Delta ABE$;

কিন্তু $\Delta ABE, \Delta ABD$-এর অংশ,

$\therefore$ ΔABE-এর ক্ষেত্রফল, ΔABD-এর ক্ষেত্রফলের সমান হতে পারে না।

সুতরাং আমরা যা ধরে নিঁয়েছি, অর্থাৎ CD, AB-এর সমান্তরাল নয়—এই ধরে নেওয়াটা সঠিক নয়।

$\therefore \quad AB \parallel CD.$

[মন্তব্য ঃ (1) এই উপপাদ্যটি উপপাদ্য 28-এর বিপরীত, তাই এভাবে প্রমাণ করা হল।

(2) লক্ষ কর, সমান সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজগুলি একই ভূমির উপর এবং ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত হলে, তারা সমান উচ্চতা বিশিষ্ট হবে।

কয়েকটি প্রয়োগ ঃ

1. ΔABC-এর BE ও CF দুটি মধ্যমা । প্রমাণ কর যে, *(i)* $\Delta BCE = \Delta BCF$; *(ii)* এ থেকে প্রমাণ কর যে, $FE \parallel BC$.

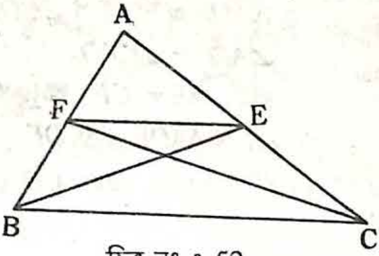
প্রমাণ ঃ $\because$ BE মধ্যমা,

$\therefore \ \Delta BCE = \frac{1}{2} \Delta ABC.$

আবার, $\because$ CF মধ্যমা,

$\therefore \ \Delta BCF = \frac{1}{2} \Delta ABC.$

$\therefore \ \Delta BCE = \Delta BCF \ldots (i)$



চিত্র নং ঃ 52

$\because$ ΔBCE ও ΔBCF-এর ক্ষেত্রফল সমান এবং তারা একই ভূমি BC-এর একই পার্শ্বে অবস্থিত,

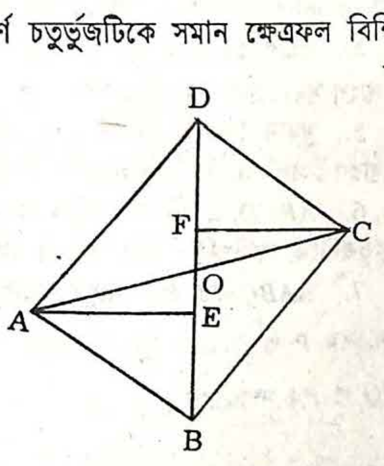
$\therefore \ FE \parallel BC. \quad \ldots\ldots (ii)$

[মন্তব্য ঃ এটি উপপাদ্য 23-এর আর একটি প্রমাণ । যেহেতু উপপাদ্য 29 প্রমাণ করতে যেসব ধর্ম ব্যবহার করা হয়েছে, সেগুলি প্রমাণ করতে উপপাদ্য 23-এর প্রয়োজন হয় না, সেজন্য এভাবেও উপপাদ্য 23 প্রমাণ করা যেতে পারে ।]

2. একটি চতুর্ভুজের কোনো কর্ণ চতুর্ভুজটিকে সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুটি ত্রিভুজে বিভক্ত করলে, ঐ কর্ণটি অপর কর্ণটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে ।

ধরা যাক, $ABCD$ চতুর্ভুজটির DB কর্ণ চতুর্ভুজটিকে সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুটি ত্রিভুজে বিভক্ত করেছে ; অর্থাৎ $\Delta ABD = \Delta CBD$.

AC ও BD কর্ণ দুটি পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে । প্রমাণ করতে হবে যে, $AO = CO$.



চিত্র নং ঃ 53

অঙ্কন ঃ BD-এর উপর A ও C বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত লম্ব দুটি BD-কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে ।

প্রমাণ ঃ $\Delta ABD = \Delta CBD$.

তারা একই ভূমি BD-এর উপর অবস্থিত,

∴ তাদের উচ্চতা সমান।

∴ $AE = CF$

এবার, ΔAOE ও ΔCOF-এর

$\angle AOE =$ বিপ্রতীপ $\angle COF$,

$\angle AEO = \angle CFO$ [∵ প্রত্যেকেই 1 সমকোণ]

এবং $AE = CF$ (অনুরূপ বাহু);

∴ $\Delta AOE \cong \Delta COF$.

∴ $AO = CO$ (অনুরূপ বাহু)।

অনুশীলনী 11

1. একটি চতুর্ভুজের প্রত্যেকটি কর্ণ চতুর্ভুজটিকে সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে। প্রমাণ কর যে, চতুর্ভুজটি সামান্তরিক।

2. ΔABC-এর $AB = AC$. B ও C বিন্দু দুটি থেকে AC ও AB-এর উপর অঙ্কিত লম্ব দুটি যথাক্রমে তাদের E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $FE \parallel BC$.

3. ΔABC-এর $\angle B$ ও $\angle C$ সমান। এই কোণ দুটির সমদ্বিখণ্ডক AC ও AB-কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $FE \parallel BC$.

4. প্রমাণ কর যে, একটি ট্রাপিজিয়মের তির্যক বাহু দুটির মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ সমান্তরাল বাহু দুটির সমান্তরাল।

5. সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুটি সামান্তরিক $ABCD$ ও $AEFG$-এর $\angle A$ সাধারণ কোণ এবং E বিন্দু AB-এর উপর অবস্থিত। প্রমাণ কর যে, $DE \parallel FC$.

6. $ABCD$ একটি সামান্তরিক ও $ABCE$ একটি চতুর্ভুজ। যদি AC কর্ণ চতুর্ভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তাহলে প্রমাণ কর যে, $AC \parallel DE$.

7. ΔABC-এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D. BC ও BA বাহু দুটির উপর যথাক্রমে P ও Q এমন দুটি বিন্দু যে, $\Delta BPQ = \frac{1}{2}\Delta ABC$. প্রমাণ কর যে, DQ ও PA সমান্তরাল।

2.7 সমবিন্দু সংক্রান্ত উপপাদ্য ঃ

তোমরা জান তিন বা তার বেশি সরলরেখার একটি সাধারণ বিন্দু থাকলে সরলরেখাগুলি আমরা সমবিন্দু সরলরেখা বলি। তোমরা অঙ্কনের মাধ্যমে হয়তো লক্ষ করেছ কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্ব সমদ্বিখণ্ডক তিনটি, শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুগুলির উপর অঙ্কিত লম্ব তিনটি, তিনটি কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক তিনটি বা মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু হয়। এবার এই ধর্মগুলিই আমরা যুক্তির সাহায্যে প্রমাণ করব।

সমান্তরাল না হলে, প্রতিটি ক্ষেত্রে দুটি সরলরেখা একটি বিন্দুতে ছেদ করবে। তৃতীয় সরলরেখাটি প্রদত্ত শর্তানুসারে অঙ্কন করলে, সেই ছেদবিন্দু দিয়ে যাবে কি না তা প্রমাণ করা খুবই দুরুহ। সেজন্য তৃতীয় সরলরেখাটি আমরা এমনভাবে অঙ্কন করি যে ওটি যেন সেই ছেদবিন্দু দিয়ে যায়। তার পরে প্রমাণ করি যে সেই সরলরেখাটি প্রদত্ত শর্ত পালন করে ; তাহলেই ধর্মটি প্রমাণিত হবে।

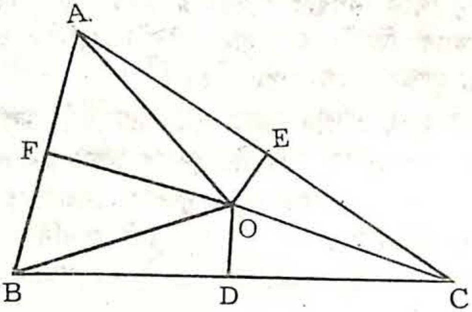
যেমন, 'একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্ব সমদ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু'—এই উপপাদ্যটি প্রমাণ করতে হলে প্রথমে যেকোনো দুটি বাহুর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন করে নিতে হবে। পরের পৃষ্ঠায় 54 নং চিত্রে BC ও CA বাহু দুটির লম্ব সমদ্বিখণ্ডক O বিন্দুতে ছেদ করেছে। এবার AB-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক O বিন্দু দিয়ে যাওয়ার কথা ; কিন্তু তা প্রমাণ করা খুবই কষ্টকর। সেজন্য AB-এর মধ্যবিন্দুর সঙ্গে O বিন্দু যুক্ত করে ঐ রেখাংশ যে AB-এর উপর লম্ব তা দেখাতে হবে, অথবা O বিন্দু থেকে AB-এর উপর অঙ্কিত লম্ব AB-কে সমদ্বিখণ্ডিত করবে তা দেখাতে হবে।

সমবিন্দু সংক্রান্ত উপপাদ্য প্রমাণের সাধারণত এটাই ধারা।

এই ধারা অবলম্বন করেই সমবিন্দু সংক্রান্ত পরবর্তী উপপাদ্যগুলি প্রমাণ করা হয়েছে।

উপপাদ্য 30

যেকোনো ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্ব সমদ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু।



চিত্র নং ঃ 54

ধরা যাক, ΔABC-এর BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F.

প্রমাণ করতে হবে যে, D, E ও F বিন্দু তিনটি দিয়ে যথাক্রমে BC, CA ও AB-এর উপর অঙ্কিত লম্বগুলি সমবিন্দু।

মনে করি, BC ও CA-এর উপর অঙ্কিত লম্ব দুটি O বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে। তাহলে প্রমাণ করলেই হবে যে, OF, AB-এর উপর লম্ব।

অঙ্কন ঃ O, A ; O, B ; O, C যুক্ত করা হল।

প্রমাণঃ ΔBOD ও ΔCOD-এর

$BD = CD$ [$\because$ D, BC-এর মধ্যবিন্দু],

OD সাধারণ,

অন্তর্ভূত $\angle BDO$ = অন্তর্ভূত $\angle CDO$ [$\because OD \perp BC$];

$\therefore \Delta BOD \cong \Delta COD$

$\therefore OB = OC$ (অনুরূপ)

অনুরূপভাবে, ΔCOE ও ΔAOE থেকে দেখানো যায় যে

$OC = OA$,

$\therefore OA = OB$

এবার, ΔAFO ও ΔBFO-এর

$OA = OB$ (প্রমাণিত),

OF সাধারণ

$AF = BF$ [$\because$ F, AB-এর মধ্যবিন্দু];

$\therefore \Delta AFO \cong \Delta BFO$.

$\therefore$ $\angle AFO = \angle BFO$ (অনুরূপ কোণ)।

$\therefore$ AB সরলরেখার উপর OF দণ্ডায়মান হওয়ার ফলে যে দুটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয়েছে তারা সমান,

$\therefore$ তাদের প্রত্যেকে সমকোণ,

$\therefore$ $OF \perp AB$,

অর্থাৎ লম্ব সমদ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু।

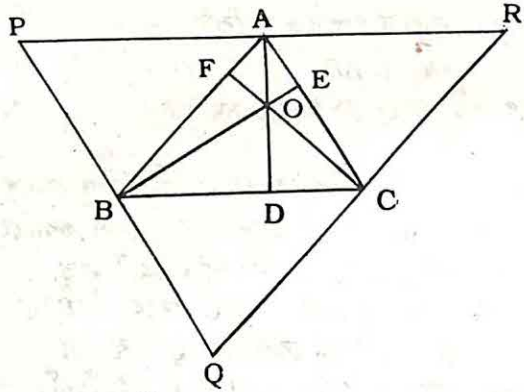
[মন্তব্য ঃ (1) O বিন্দুকে AB-এর মধ্যবিন্দু F-এর সঙ্গে যুক্ত না করে O বিন্দু থেকে AB-এর লম্ব অঙ্কন করেও প্রমাণ করা যেত যে লম্বটি AB-এর মধ্যবিন্দুগামী। তাহলেও উপপাদ্যটি প্রমাণ হতো।

(2) লক্ষ কর, সাধারণ বিন্দু O থেকে A, B, C শীর্ষবিন্দু তিনটি সমদূরবর্তী। সুতরাং O-কে কেন্দ্র করে OA বা OB বা OC ব্যাসার্ধ নিয়ে যে বৃত্ত অঙ্কন করা যাবে, তা A, B ও C এই তিনটি বিন্দু দিয়েই যাবে। এই বৃত্তকে বলা হয় ত্রিভুজের **পরিবৃত্ত** এবং কেন্দ্রটিকে বলা হয় ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র। অতএব বলা যায় তিনটি লম্ব সমদ্বিখণ্ডক যে সাধারণ বিন্দু দিয়ে যায়, সেই বিন্দুটি ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র। ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধটিকে বলা হয় পরিব্যাসার্ধ।]

(3) 54 নং চিত্রে ত্রিভুজটি সূক্ষ্মকোণী বলে O বিন্দু ত্রিভুজের ভিতরে অবস্থিত হয়েছে। ত্রিভুজটি সমকোণী হলে O বিন্দু অতিভূজের মধ্যবিন্দু হতো এবং ত্রিভুজটি স্থূলকোণী হলে O বিন্দু ত্রিভুজের বাইরে অবস্থিত হতো।

উপপাদ্য 31

যেকোনো ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুগুলির উপর অঙ্কিত লম্ব তিনটি সমবিন্দু।



চিত্র নং ঃ 55

ধরা যাক, ΔABC-এর শীর্ষবিন্দু A, B ও C থেকে বিপরীত বাহু BC, CA ও AB-এর উপর অঙ্কিত লম্ব তিনটি যথাক্রমে AD, BE ও CF.

প্রমাণ করতে হবে যে, AD, BE ও CF সমবিন্দু।

অঙ্কন ঃ A, B ও C বিন্দু দিয়ে যথাক্রমে BC, CA ও AB-এর সমান্তরাল অঙ্কন করা হল, যারা পরস্পরকে যথাক্রমে P, Q ও R বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ ঃ অঙ্কনানুসারে, $APBC$, $ABCR$ এবং $ABQC$ প্রত্যেকেই সামান্তরিক।

সামান্তরিক $APBC$ ও সামান্তরিক $ABCR$ থেকে পাই

$AP = BC$ এবং $AR = BC$,

$\therefore \quad AP = AR$;

অর্থাৎ A, PR-এর মধ্যবিন্দু।

অনুরূপভাবে, দেখানো যায় যে,

B, PQ-এর মধ্যবিন্দু

এবং C, QR-এর মধ্যবিন্দু।

$\because \quad BC \parallel PR$ এবং $AD \perp BC$,

$\therefore \quad AD \perp PR$,

অনুরূপভাবে, $BE \perp PQ$ এবং $CF \perp QR$.

$\therefore$ AD, BE, CF যথাক্রমে ΔPQR-এর PR, PQ ও QR বাহুর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক।

$\therefore \quad AD, BE$ ও CF সমবিন্দু।

[**মন্তব্য ঃ** (1) এখানে প্রমাণের ধারাকে একটু পরিবর্তন করা হল, কারণ উপপাদ্য 30 এখানে ব্যবহার করা যাচ্ছে।

(2) প্রমাণের সাধারণ ধারাতেও এটি প্রমাণ করা যায়, কিন্তু তার জন্য যে ধর্ম ব্যবহার করতে হবে তা তোমরা দশম শ্রেণীতে জানবে বলে সেভাবে প্রমাণ তোমরা দশম শ্রেণীতে করতে পারবে।

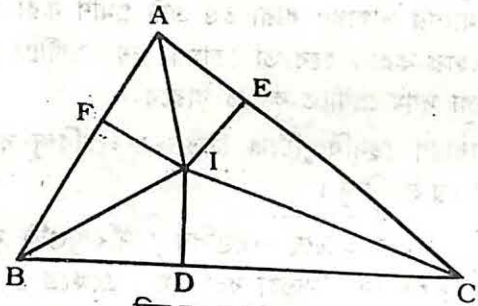
(3) সাধারণ ছেদবিন্দুটিকে ত্রিভুজের লম্ববিন্দু বলা হয়। এ ক্ষেত্রে $O, \Delta ABC$-এর লম্ববিন্দু।

(4) পূর্বেই বলা হয়েছে লম্বগুলির পাদবিন্দুগুলি যুক্ত করে যে ত্রিভুজ পাওয়া যায় তাকে পাদ-ত্রিভুজ বলা হয়। এক্ষেত্রে D, E, F যুক্ত করে যে ত্রিভুজটি পাওয়া যাবে সেই ত্রিভুজটিই ABC ত্রিভুজের পাদ ত্রিভুজ।

(5) জেনে রাখ; লম্বগুলি পাদ-ত্রিভুজের কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডক।)

উপপাদ্য 32

যেকোনো ত্রিভুজের কোণগুলির অন্তর্দ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু।



চিত্র নং ঃ 56

ধরা যাক, ABC একটি ত্রিভুজ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle A, \angle B$ ও $\angle C$-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু।

মনে করি, $\angle B$ ও $\angle C$-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক I বিন্দুতে ছেদ করে। A, I যুক্ত করা হল। AI, $\angle A$-এর সমদ্বিখণ্ডক প্রমাণ করলেই প্রমাণিত হবে যে অন্তর্দ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু।

অঙ্কন ঃ I বিন্দু থেকে BC, CA ও AB-এর উপর অঙ্কিত লম্ব তিনটি যথাক্রমে ID, IE ও IF.

প্রমাণঃ ΔBID ও ΔBIF-এর

$\angle IBD = \angle IBF$ ($\because$ BI, $\angle B$-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক),

$\angle IDB = \angle IFB$ ($\because$ প্রত্যেকে 1 সমকোণ)

এবং IB সাধারণ ;

$\therefore \Delta BID \cong \Delta BIF$

$\therefore ID = IF$ (অনুরূপ বাহু)।

অনুরূপভাবে, ΔCID ও ΔCIE থেকে দেখানো যায় যে,

$ID = IE$,

$\therefore IE = IF$

এবার, সমকোণী ত্রিভুজ ΔAFI ও ΔAEI-এর

$IF = IE$ (প্রমাণিত)

এবং অতিভুজ AI সাধারণ,

$\therefore \Delta AFI \cong \Delta AEI$.

∴ $\angle FAI = \angle EAI$ (অনুরূপ কোণ) ।

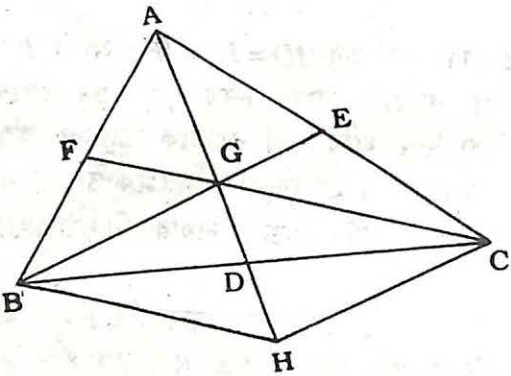
∴ AI, $\angle A$-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক ।

∴ তিনটি অন্তর্দ্বিখণ্ডক সমবিন্দু ।

[মন্তব্য ঃ (1) লক্ষ কর, $ID = IE = IF$; অর্থাৎ I বিন্দুকে কেন্দ্র করে ID বা IE বা IF ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করলে সেই বৃত্তটি D, E ও F বিন্দু দিয়ে যাবে । ঐ বৃত্তটিকে ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত বলা হয় এবং ঐ বৃত্তের কেন্দ্রকে বলা হয় ত্রিভুজের **অন্তঃকেন্দ্র** ; ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধকে বলা হয় **অন্তর্ব্যাসার্ধ** । অন্তর্দ্বিখণ্ডকগুলির সাধারণ বিন্দুই অন্তঃকেন্দ্র ।]

উপপাদ্য 33

যেকোনো ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমা সমবিন্দু।



চিত্র নং ঃ 57

ধরা যাক, ΔABC-এর BE ও CF মধ্যমা দুটি G বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু।

মনে করি, A, G যুক্ত করে বর্ধিত করলে, তা BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করে। D, BC-এর মধ্যবিন্দু প্রমাণ করলেই প্রমাণিত হবে যে, মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু।

অঙ্কন ঃ AD-কে H পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যে $GH = AG$. B, H ; C, H যুক্ত করা হল।

প্রমাণ ঃ ΔABH-এর AB ও AH বাহু দুটির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে F ও G.

$\therefore$ $FG \parallel BH$, অর্থাৎ $GC \parallel BH$.

আবার, ΔAHC-এর AH ও AC বাহু দুটির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে G ও E,

$\therefore$ $GE \parallel HC$, অর্থাৎ $BG \parallel HC$.

$\therefore$ $BGCH$ একটি সামান্তরিক।

$\because$ সামান্তরিকের কর্ণ দুটি পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে,

$\therefore$ D, BC-এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore$ ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমা সমবিন্দু।

[মন্তব্য ঃ (1) আমরা জানি একটি সামান্তরিকের কর্ণ দুটি পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। সেজন্য BC-কে কর্ণ করে একটি সামান্তরিক পাওয়ার চেষ্টা করা হল। আবার আমরা জানি ত্রিভুজের দুটি বাহুর মধ্যবিন্দুগুলির

সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল, তাই AG-এর সমান করে বর্ধিত করা হল।

(2) লক্ষ কর, BH, GC অর্থাৎ FG-এর সমান্তরাল হওয়া প্রয়োজন। সেজন্য B বিন্দু দিয়ে FG সমান্তরাল অঙ্কন করে, যা বর্ধিত AD-কে H বিন্দুতে ছেদ করবে এবং H, C যুক্ত করেও উপপাদ্যটি প্রমাণ করা যায়। এভাবে প্রমাণ কর তো।

(3) যে বিন্দুতে মধ্যমা তিনটি ছেদ করে, সেই বিন্দুকে **ভরকেন্দ্র** বলা হয়। চিত্র নং 57-এ G বিন্দুটি ভরকেন্দ্র।]

অনুসিদ্ধান্ত ঃ মধ্যমা তিনটি যে যে বিন্দুতে সমত্রিখণ্ডিত হয়, প্রত্যেক ক্ষেত্রেই ভরকেন্দ্র তাদের একটি বিন্দু।

চিত্র নং 57-এ $GD = \frac{1}{3}AD, FG = \frac{1}{3}CF, EG = \frac{1}{3}BE.$

$\because$ $BGCH$ সামান্তরিকের কর্ণ দুটি পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে,

$\therefore$ D, GH-এর মধ্যবিন্দু।

$$\therefore \quad GD = \frac{1}{2}GH = \frac{1}{2}AG,$$

$$\therefore \quad 2GD = AG$$

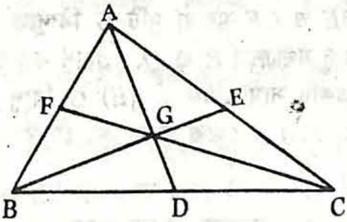
এবং $GD = AD. \quad \therefore \quad GD = \frac{1}{3}AD.$

[**মন্তব্য ঃ** এ ধর্মটিকে নিম্নলিখিত উপায়েও বলা যায় ঃ 'যেকোনো মধ্যমা ভরকেন্দ্রে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত হয়।']

কয়েকটি প্রয়োগ ঃ

1. ΔABC-এর মধ্যমা তিনটি AD, BE ও CF, G বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে।

প্রমাণ কর যে, *(i)* $\Delta GBC = \frac{1}{3}\Delta ABC$, *(ii)* $\Delta GBD = \frac{1}{6}\Delta ABC.$



চিত্র নং ঃ 58

প্রমাণ ঃ ΔABC-এর AD মধ্যমা,

$\therefore \quad \Delta ABD = \Delta ACD.$

আবার ΔGBC-এর GD মধ্যমা,

$$\therefore \quad \Delta GBD = \Delta GCD.$$

$$\therefore \quad \Delta ABD - \Delta GBD = \Delta ACD - \Delta GCD.$$

$$\therefore \quad \Delta AGB = \Delta AGC,$$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\Delta AGC = \Delta BGC$

$$\therefore \quad \Delta BGC = \Delta AGC = \Delta AGB = \frac{1}{3}(\Delta BGC + \Delta AGC + \Delta AGB) = \frac{1}{3}\Delta ABC. \quad \ldots\ldots (i)$$

আবার, $\because \quad \Delta GBD = \frac{1}{2}\Delta BGC,$

$$\therefore \quad \Delta GBD = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\Delta ABC\right) = \frac{1}{6}\Delta ABC. \quad \ldots\ldots (ii)$$

অনুশীলনী 12

1. ΔABC-এর AD, BE ও CF মধ্যমা তিনটি G বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করেছে। ΔABC-এর ক্ষেত্রফল 36 বর্গ সেমি হলে, *(i)* ΔAGB-এর ক্ষেত্রফল কত ? *(ii)* ΔCGE-এর ক্ষেত্রফল কত ? *(iii)* চতুর্ভুজ $BDGF$-এর ক্ষেত্রফল কত ? যুক্তি দাও।

2. ΔABC-এর AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা। প্রমাণ কর যে,
   (i) $4(AD + BE + CF) > 3(AB + BC + CA)$
   (ii) $3(AB + BC + CA) > 2(AD + BE + CF)$.

3. ΔABC-এর BE ও CF মধ্যমা দুটি G বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে। BG ও CG-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q. প্রমাণ কর যে,
   (i) $PQEF$ একটি সামান্তরিক। *(ii)* G বিন্দু BE ও CF-কে $2:1$ অনুপাতে বিভক্ত করে। *(iii)* এ থেকে প্রমাণ কর যে মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু।

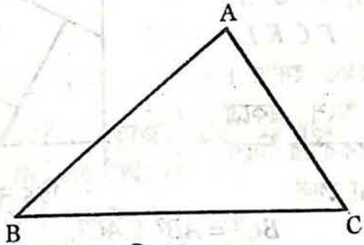
2.8 পীথাগোরাসের উপপাদ্য

নিচে যে ধর্মটি দেওয়া হচ্ছে ঐ ধর্মটিকে পীথাগোরাসের উপপাদ্য বলা হয়। তোমাদের বর্তমানে কেবল ঐ উপপাদ্যের সাধারণ নির্বচনটি জানতে হবে এবং ব্যবচ্ছেদ প্রণালীতে তা পরীক্ষা করে দেখতে হবে।

পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিবৃতি ঃ

যেকোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, তার অপর দুটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান হবে।

চিত্রের সাহায্যে আমরা নিম্নলিখিতভাবে বিবৃতিটি প্রকাশ করতে পারি।



চিত্র নং ঃ 59

ΔABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

ΔABC-এর $\angle BAC$ সমকোণ ;

$\therefore$ BC বাহু অতিভুজ এবং অপর বাহু দুটি AB ও AC.

তাহলে $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

[মন্তব্য ঃ BC, AB ও AC বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলকে যথাক্রমে BC^2, AB^2 ও AC^2 হিসাবে লেখা হয়।]

ব্যবচ্ছেদ প্রণালীতে পরীক্ষা ঃ

চিত্র নং 60-এ ABC সমকোণী ত্রিভুজ, যার BC অতিভুজ এবং $AC > AB$.

BC-এর উপর বর্গক্ষেত্র $BCKL$, AB-এর উপর বর্গ-ক্ষেত্র $ABDE$ এবং AC-এর উপর বর্গক্ষেত্র $ACFG$.

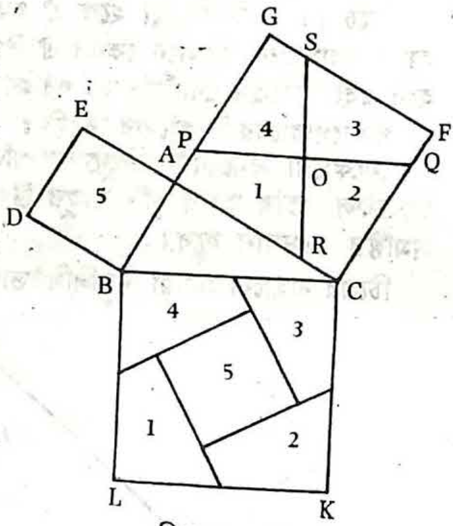
$ACFG$ বর্গক্ষেত্রের কর্ণ দুটির ছেদবিন্দু O, O বিন্দু দিয়ে BC-এর সমান্তরাল রেখা AG ও CF-কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। আবার O বিন্দু দিয়ে PQ-এর লম্ব সরলরেখা AC ও GF-কে যথাক্রমে R ও S বিন্দুতে ছেদ করে।

এর ফলে $ACFG$ বর্গক্ষেত্রটি চারটি অংশে বিভক্ত হয়েছে। এই চারটি

অংশকে 1, 2, 3, 4 দ্বারা চিহ্নিত করা হল। *ABDE* বর্গক্ষেত্রটিকে 5 দ্বারা চিহ্নিত করা হল।

একটা মোটা কাগজে চিত্র নং 60-এর মত একটি চিত্র অঙ্কন করে নিখুঁত ভাবে কেটে নাও। এবার ঐ চিত্র থেকে বর্গক্ষেত্রগুলি আলাদা করে কেটে নাও। *ACFG* বর্গক্ষেত্রটি *PQ* ও *RS* রেখাংশ বরাবর কেটে নিয়ে চারটি অংশে বিভক্ত কর।

এবার 1, 2, 3, 4 ও 5 চিহ্নিত অংশগুলি *BCKL* বর্গক্ষেত্রের উপর ঠিকমত বসাও। দেখবে ঐ পাঁচটি অংশ একত্রে বর্গক্ষেত্রের সঙ্গে একেবারে মিশে গেছে। তা হলে দেখা গেল



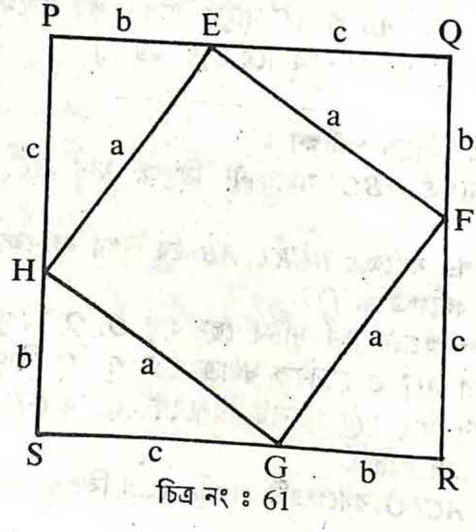
চিত্র নং : 60

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

তোমরা নিম্নলিখিত উপায়েও এই ধর্মটি যাচাই করতে পার।

মনে করি, $BC = a, CA = b$ এবং $AB = c$. $(b + c)$ বাহু বিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র *PQRS* আঁকা হল। *PQ*, *OR*, *RS* এবং *SP* বাহুগুলির উপর যথাক্রমে *E*, *F*, *G*, *H* বিন্দুগুলি এমনভাবে নেওয়া হল যে,

$$PE = QF = RG = SH = b$$



চিত্র নং : 61

তার ফলে চারটি এমন সমকোণী ত্রিভুজ পাওয়া যাবে যাদের অতিভুজ a এবং অপর বাহু দুটি হল b এবং c. চিত্রের অবশিষ্ট অংশ হল a^2.

$\therefore \quad (b+c)^2 = a^2 + 4.\frac{1}{2}bc$

বা, $b^2 + c^2 + 2bc = a^2 + 2bc$

বা, $b^2 + c^2 = a^2$

[মন্তব্য ঃ ব্যবচ্ছেদ প্রণালীর সাহায্যে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের প্রমাণ করার ব্যাপারে হিন্দু গণিতজ্ঞ ভাস্করাচার্যের অবদান বিশেষভাবে উল্লেখ্যযোগ্য ।]

কয়েকটি প্রয়োগ ঃ

1. ABC সমকোণী ত্রিভুজের BC অতিভুজ । $AB = 3$ সেমি, $AC = 4$ সেমি হলে, BC-এর দৈর্ঘ্য কত ?

পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &= (3^2 + 4^2) \text{ বর্গ সেমি} \\ &= (9 + 16) \text{ বর্গ সেমি} \\ &= 25 \text{ বর্গ সেমি} \\ \therefore \quad BC &= \sqrt{25} \text{ সেমি} \\ &= 5 \text{ সেমি} \end{aligned}$$

2. PQR সমকোণী ত্রিভুজের PR অতিভুজ ।

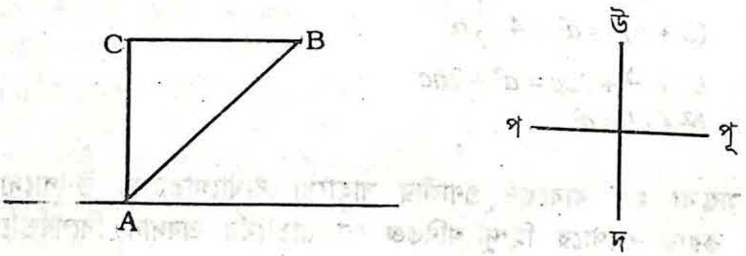
$PR = 13$ সেমি, $QR = 5$ সেমি হলে, $PQ =$ কত সেণ্টিমিটার ?

পীথারোগারেস উপপাদ্য অনুসারে

$$\begin{aligned} PR^2 &= PQ^2 + QR^2. \\ \therefore \quad PQ^2 &= PR^2 - QR^2 \\ &= (13^2 - 5^2) \text{ বর্গ সেমি} \\ &= (169 - 25) \text{ বর্গ সেমি} \\ &= 144 \text{ বর্গ সেমি ।} \\ \therefore \quad PQ &= \sqrt{144} \text{ সেমি} \\ &= 12 \text{ সেমি} \end{aligned}$$

3. এক ব্যক্তিকে A অবস্থান থেকে A-এর পূর্ব থেকে উত্তরের দিকে B অবস্থানে গিয়ে, B-এর পশ্চিমে অবস্থিত C অবস্থানে যেতে 500 মিটার

হাঁটতে হয়। C অবস্থান A অবস্থানের উত্তরে এবং A থেকে 200 মিটার দূরে। A থেকে B-এর দূরত্ব কত ?



চিত্র নং ঃ 62

মনে করি, $AB = x$ মিটার,

$\therefore \quad BC = (500 - x)$ মিটার।

$\because \quad \Delta ABC$ সমকোণী, যার $\angle C$ সমকোণ

$\therefore \quad AB^2 = BC^2 + AC^2$

বা, $x^2 = (500 - x)^2 + 200^2$

বা, $x^2 = 250000 - 1000x + x^2 + 40000$

বা, $1000x = 290000$

$\therefore \quad x = 290.$

$\therefore \quad A$ থেকে B-এর দূরত্ব $= 290$ মিটার।

অনুশীলনী 13

1. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য 60 সেমি ও 11 সেমি ; অতিভুজের দৈর্ঘ্য কত ?

2. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্য 17 সেমি ও অপর একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 8 সেমি ; তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

3. একটি সমকোণী ত্রিভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 35 সেমি, অতিভুজ ও অপর বাহুটির দৈর্ঘ্যের অন্তর 25 সেমি। অতিভুজ ও অপর বাহুটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

4. একই স্থান থেকে এক ব্যক্তি উত্তর-পূর্ব দিকে 56 মিটার ও অপর এক ব্যক্তি দক্ষিণ-পূর্ব দিকে 33 মিটার পথ গেলেন। এখন তাদের মধ্যে দূরত্ব কত মিটার ?

5. A থেকে B পশ্চিমে ও C দক্ষিণে অবস্থিত। A থেকে B-তে গিয়ে, B থেকে C-তে গিয়ে আবার A-তে ফিরে আসতে হলে, এক ব্যক্তিকে 176 মিটার হাঁটতে হয়। কিন্তু A থেকে B হয়ে C-তে যেতে তাকে 121 মিটার হাঁটতে হয়। A থেকে B-এর, B থেকে C-এর এবং C থেকে A-এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

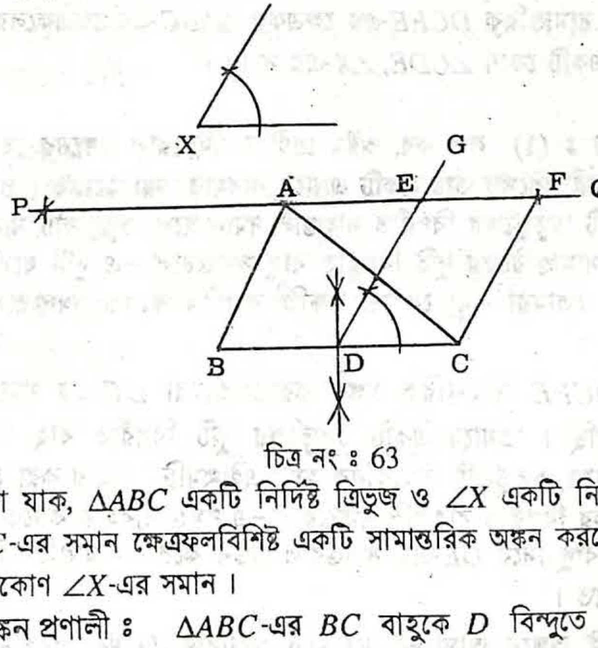
তৃতীয় অধ্যায়

সম্পাদ্য

সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট চিত্র অঙ্কন ঃ

সম্পাদ্য 3

একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কন করতে হবে, যার একটি কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান ।



চিত্র নং ঃ 63

ধরা যাক, ΔABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ ও $\angle X$ একটি নির্দিষ্ট কোণ । ΔABC-এর সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কন করতে হবে, যার একটি কোণ $\angle X$-এর সমান ।

অঙ্কন প্রণালী ঃ ΔABC-এর BC বাহুকে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করা হল । A বিন্দু দিয়ে BC-এর সমান্তরাল করে PQ সরলরেখা অঙ্কন করা হল । $\angle X$-এর সমান করে $\angle CDG$ এমনভাবে অঙ্কন করা হল যে BC-এর যেদিকে A অবস্থিত G বিন্দু যেন সেদিকেই অবস্থিত হয় । মনে করি, DG, PQ সরলরেখাকে E বিন্দুতে ছেদ করে । EQ থেকে DC-এর সমান করে EF অংশ কেটে নেওয়া হল । C, F যুক্ত করা হল ।

তাহলে $CDFE$ হল উদ্দিষ্ট সামান্তরিক ।

প্রমাণঃ A, D যুক্ত করা হল।

$\because$ $DC \parallel EF$, এবং $DC = EF$.

$\therefore$ $DCFE$ একটি সামান্তরিক।

সামান্তরিক $DCFE$-এর $\angle CDE$ নির্দিষ্ট $\angle X$-এর সমান, আবার ΔADC ও সামান্তরিক $DCFE$ একই ভূমি DC এবং একই সমান্তরাল যুগল AC ও AQ-এর মধ্যে অবস্থিত,

$\therefore$ $\Delta ADC = \frac{1}{2}$ সামান্তরিক $DCFE$;

কিন্তু AD, ΔABC-এর মধ্যমা,

$\therefore$ $\Delta ADC = \frac{1}{2} \Delta ABC$.

$\therefore$ সামান্তরিক $DCFE = \Delta ABC$,

অর্থাৎ, সামান্তরিক $DCFE$-এর ক্ষেত্রফল ΔABC-এর ক্ষেত্রফলের সমান এবং তার একটি কোণ $\angle CDE$, $\angle X$-এর সমান।

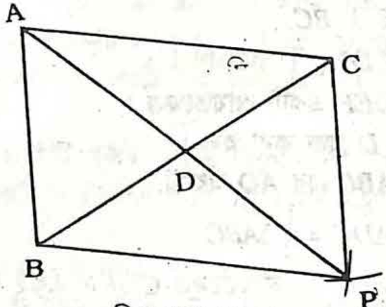
[মন্তব্য : (1) লক্ষ কর, অষ্টম শ্রেণীতে সমান্তরাল অঙ্কনের যে তিনটি পদ্ধতি তোমরা শিখেছ তার একটি এখানে ব্যবহার করা হয়েছে। প্রকৃতপক্ষে এই পদ্ধতিটি 'চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি সমান হলে, চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হয়' এবং 'সামান্তরিকের দুটি বিপরীত বাহু সমান্তরাল',–এ দুটি ধর্মের উপর প্রতিষ্ঠিত। তোমরা অন্য কোনো পদ্ধতি ব্যবহার করেও সমান্তরাল অঙ্কন করতে পার।

(2) $DCFE$ সামান্তরিক অঙ্কন করতে আমরা DC-এর সমান EF কেটে নিয়েছি। 'এখানে একটি চতুর্ভুজের দুটি বিপরীত বাহু সমান ও সমান্তরাল হলে, চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হয়'–এই ধর্মটি ব্যবহার করা হয়েছে। 'সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলি সমান্তরাল'–এ ধর্মও ব্যবহার করতে পারতে, অর্থাৎ C বিন্দু দিয়ে DE-এর সমান্তরাল অঙ্কন করেও সামান্তরিকটি অঙ্কন করতে পারতে।

(3) এই অঙ্কনে আমাদের BC-এর মধ্যবিন্দু D-এর অবস্থান জানা প্রয়োজন। সেজন্য লম্ব সমদ্বিখণ্ডক না অঙ্কন করে নিম্নলিখিত উপায়েও এগোতে পারতে।

B ও C-কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে AC ও AB-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে দুটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করা হল, যারা P বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে। A, P যুক্ত করা হল, যা BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে D, BC-এর মধ্যবিন্দু।

অঙ্কন অনুসারে $ABPC$ একটি সামান্তরিক। সুতরাং, এর কর্ণ দুটি AP ও BC পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

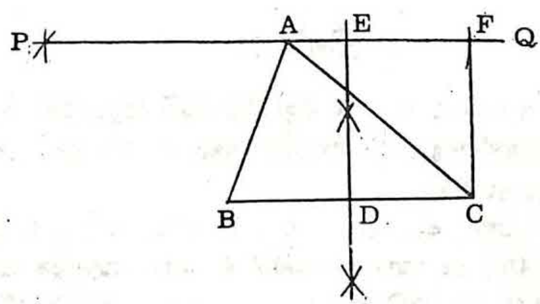


চিত্র নং ঃ 64

(4) প্রমাণ করার প্রয়োজন না হলে, চিত্র নং 62-তে A, D যুক্ত করার কোন প্রয়োজন নেই।

কয়েকটি প্রয়োগ ঃ

1. একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কন কর।



চিত্র নং ঃ 65

ধরা যাক, ΔABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ।

ΔABC-এর সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কন প্রণালী ঃ ΔABC-এর BC বাহুর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন করা হল। ঐ লম্ব সমদ্বিখণ্ডকটি BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দু দিয়ে BC-এর সমান্তরাল সরলরেখা PQ অঙ্কন করা হল। লম্ব সমদ্বিখণ্ডকটি PQ-কে E বিন্দুতে ছেদ করে। DC-এর সমান করে EQ থেকে EF অংশ কেটে নেওয়া হল।

তাহলে $CDEF$ হল উদ্দিষ্ট আয়তক্ষেত্র।

প্রমাণঃ $\because$ $DC = EF$ এবং $DC \parallel EF$,

$\therefore$ $CDEF$ একটি সামান্তরিক।

$\because$ $DE \perp BC$,

$\therefore$ $\angle CDE = 1$ সমকোণ।

$\therefore$ $CDEF$ একটি আয়তক্ষেত্র।

এবার, A, D যুক্ত করা হল।

$\because$ ΔABC-এর AD মধ্যমা,

$\therefore$ $\Delta ADC = \frac{1}{2} \Delta ABC$

এবং $\because$ ΔADC ও আয়তক্ষেত্র $CDEF$ একই ভূমি DC এবং একই সমান্তরাল যুগল DC ও EF-এর মধ্যে অবস্থিত,

$\therefore$ $\Delta ADC = \frac{1}{2}$ আয়তক্ষেত্র $CDEF$.

$\therefore$ আয়তক্ষেত্র $CDEF = \Delta ABC$

[মন্তব্য ঃ যেহেতু আয়তক্ষেত্রের কোণগুলি সমকোণ, সেজন্য এক্ষেত্রে কোনো কোণ উল্লেখ করা প্রয়োজন হয় নি।]

অনুশীলনী 14

1. 5 সেমি, 8 সেমি ও 11 সেমি বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর। সেই ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কন কর, যার একটি কোণ 45°. অঙ্কন প্রণালী লেখ ও প্রমাণ কর।

2. ΔABC অঙ্কন কর, যার $AB = 6$ সেমি, $BC = 9$ সেমি ও $\angle ABC = 60°$. ΔABC-এর সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কন কর, যার একটি কোণ 60° এবং একটি বাহু AC বাহুর অর্ধেক। অঙ্কন প্রণালী লেখ ও প্রমাণ কর।

3. ΔPQR-এর $\angle PQR = 30°$, $\angle PRQ = 75°$ এবং $QR = 7{\cdot}5$ সেমি। ΔPQR-এর সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কন কর। অঙ্কন প্রণালী লেখ ও প্রমাণ কর।

4. 6·5 সেমি বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন কর। ঐ ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কন কর, যার একটি কোণ 55°. অঙ্কন প্রণালী লেখ ও প্রমাণ কর।

5. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন কর, যার সমান বাহু দুটির প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 8 সেমি এবং ভূমি 5 সেমি। ঐ ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক

অঙ্কন কর, যার একটি কোণ ত্রিভুজের সমান কোণ দুটির একটির সমান এবং একটি বাহু সমান বাহু দুটির একটির অর্ধেক। অঙ্কন প্রণালী লেখ ও প্রমাণ কর।

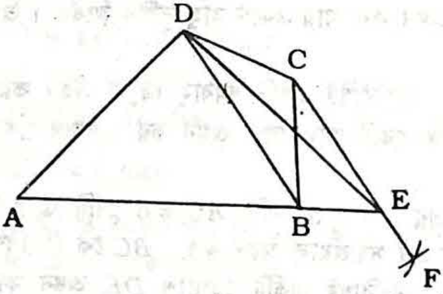
6. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন কর, যার সমান বাহু দুটির একটির দৈর্ঘ্য 9·2 সেমি এবং ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ 60°. ঐ ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কন কর, যার একটি বাহু ভূমির অর্ধেক। অঙ্কন প্রণালী লেখ ও প্রমাণ কর।

7. 7·6 সেমি বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন কর। সেই ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কন কর। অঙ্কন প্রণালী লেখ ও প্রমাণ কর।

8. ΔABC-এর $AB = 6$ সেমি, $AC = 8$ সেমি ও $BC = 10$ সেমি। A বিন্দু দিয়ে BC-এর সমান্তরাল অঙ্কন কর। BC-কে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। 9·5 সেমি দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি রেখাংশ DE অঙ্কন কর, যেন E বিন্দু A বিন্দুগামী BC-এর সমান্তরাল সরলরেখার উপর অবস্থিত হয়। সেই সমান্তরাল সরলরেখা থেকে EF অংশ কেটে নাও, যার দৈর্ঘ্য DC-এর সমান এবং C বিন্দু D বিন্দুর যেদিকে অবস্থিত, F বিন্দু যেন E বিন্দুর সেদিকেই অবস্থিত হয়। C, F যুক্ত কর। $CDEF$ কি ধরনের চতুর্ভুজ? এই চতুর্ভুজের সঙ্গে ΔABC-এর কি সম্পর্ক? যুক্তি দাও।

সম্পাদ্য 4

একটি চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করতে হবে।



চিত্র নং ঃ 66

ধরা যাক, $ABCD$ একটি চতুর্ভুজ।

$ABCD$ চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কন প্রণালী ঃ DB কর্ণটি অঙ্কন করা হল। C বিন্দু দিয়ে DB-এর সমান্তরাল CF বর্ধিত AB-কে E বিন্দুতে ছেদ করল।

D, E যুক্ত করা হল। তাহলে ΔADE উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণঃ ΔDEB ও ΔDCB একই ভূমি DB এবং একই সমান্তরাল যুগল DB ও CF-এর মধ্যে অবস্থিত,

$\therefore \quad \Delta DEB = \Delta DCB,$

$\therefore \quad \Delta ADB + \Delta DEB = \Delta ADB + \Delta DCB.$

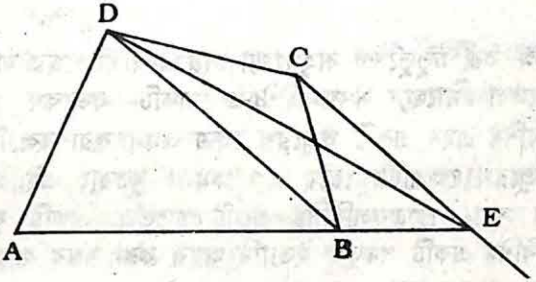
$\therefore \quad \Delta ADE =$ চতুর্ভুজ $ABCD.$

[মন্তব্য ঃ (1) সমান্তরাল অঙ্কন করার জন্য DC-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে B বিন্দুকে কেন্দ্র করে একটি চাপ এবং DB-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে C বিন্দুকে কেন্দ্র করে আর একটি চাপ অঙ্কন করা হল। অন্য পদ্ধতিতেও সমান্তরাল অঙ্কন করা যেত।]

(2) উদ্দিষ্ট অঙ্কনটি করতে কেন এভাবে এগুনো হল, তা একটু বিচার করা যাক।

DB বাহুর উপর দুটি সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ ΔDEB ও ΔDCB, DB-এর একই পার্শ্বে অবস্থিত হলে, আমরা জানি, DB ও CF সমান্তরাল

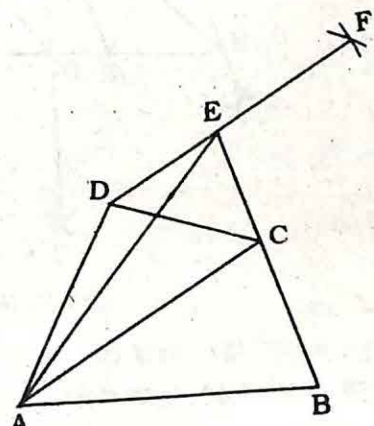
হবে। এবার EB-কে যেকোনো বিন্দু A পর্যন্ত বর্ধিত করে A, D যুক্ত করলে ADE একটি ত্রিভুজ হবে এবং $ABCD$ একটি চতুর্ভুজ হবে, যাদের



চিত্র নং : 67

ক্ষেত্রফল সমান। এখানে লক্ষ কর, DB, $ABCD$ চতুর্ভুজের কর্ণ এবং CE ওই কর্ণ DB-এর সমান্তরাল এবং E বিন্দু বর্ধিত AB-এর উপর অবস্থিত। এ থেকেই বোঝা যাবে কেন উপরোক্ত নিয়মে অঙ্কন করা হল।

(3) লক্ষ কর, চতুর্ভুজের বাহু AB ও ত্রিভুজের বাহু AE একই সরলরেখায় অবস্থিত এবং D উভয়েরই শীর্ষবিন্দু। অতএব চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ আমরা এভাবে অঙ্কন করতে পারি যে চতুর্ভুজের যেকোনো বাহু ও ত্রিভুজের একটি বাহু একই সরলরেখায় থাকবে এবং চতুর্ভুজের অপর দুটি শীর্ষবিন্দুর যেকোনো একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হবে। সেক্ষেত্রে সেই শীর্ষবিন্দু দিয়ে কর্ণ টানতে হবে এবং অপর শীর্ষবিন্দু দিয়ে সেই শীর্ষবিন্দুর সমান্তরাল অঙ্কন করতে হবে। যেমন $ABCD$ চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট এমন একটি ত্রিভুজ যদি অঙ্কন করতে হতো যে ঐ ত্রিভুজের একটি বাহু এবং চতুর্ভুজের বাহু BC একই সরলরেখায় থাকবে এবং A বিন্দু ত্রিভুজের একটি শীর্ষবিন্দু হবে, তাহলে AC কর্ণটি অঙ্কন করতে হবে এবং D বিন্দু দিয়ে AC-এর সমান্তরাল অঙ্কন করতে হবে।



চিত্র নং : 68

(4) সম্পাদ্য 4 এবং সম্পাদ্য 3 ব্যবহার করে একটি চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক বা একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কন করা যায় ।

(5) লক্ষ কর, চতুর্ভুজের বাহুসংখ্যা চার এবং ত্রিভুজের বাহুসংখ্যা তিন । তাহলে দেখা যাচ্ছে, সম্পাদ্য 4-এ একটি ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট এমন একটি ঋজুরেখ ক্ষেত্র অঙ্কন করা হল, যার বাহুসংখ্যা পূর্বের ঋজুরেখ ক্ষেত্রটির চেয়ে এক কম । সুতরাং এই পদ্ধতিতে একটি পঞ্চভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি চতুর্ভুজ, একটি ষড়ভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি পঞ্চভুজ ইত্যাদি অঙ্কন করা সম্ভব হবে এবং পদ্ধতিটি বার বার প্রয়োগ করে যেকোনো ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করা সম্ভব হবে ।]

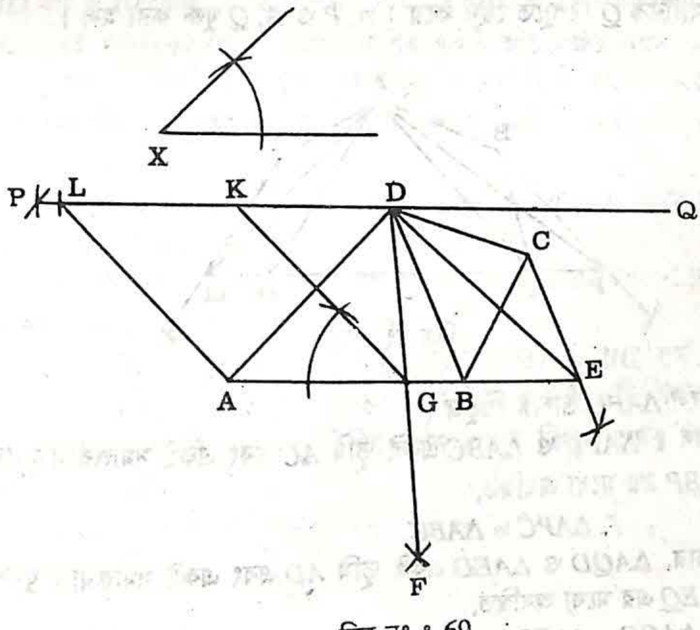
কয়েকটি প্রয়োগ ঃ

1. একটি চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কন কর, যার একটি কোণ নির্দিষ্ট।

ধরা যাক, $ABCD$ একটি চতুর্ভুজ এবং $\angle X$ একটি নির্দিষ্ট কোণ।

$ABCD$ চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কন করতে হবে, যার একটি কোণ $\angle X$-এর সমান

অঙ্কন প্রণালী ঃ DB কর্ণ টানা হল। C বিন্দু দিয়ে DB-এর সমান্তরাল অঙ্কন করা হল, যা বর্ধিত AB-কে E বিন্দুতে ছেদ করে। D, E যুক্ত করা হল, তাহলে ΔADE = চতুর্ভুজ $ABCD$.



চিত্র নং ঃ 69

D বিন্দু দিয়ে AB-এর সমান্তরাল PQ অঙ্কন করা হল। AE-এর মধ্যবিন্দু G নির্ণয় করা হল। $\angle X$-এর সমান করে $\angle AGK$ অঙ্কন করা হল, যা PQ সরলরেখাকে K বিন্দুতে ছেদ করে। সমান্তরাল সরলরেখা থেকে GA-এর সমান করে KL এমনভাবে কেটে নেওয়া হল যে, G-এর যেদিকে A বিন্দু অবস্থিত A-এর সেদিকেই যেন L বিন্দু অবস্থিত হয়।

তাহলে $AGKL$ উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রমাণ ঃ অঙ্কনানুসারে, ΔADE = চতুর্ভুজ $ABCD$

আবার অঙ্কনানুসারে, সামান্তরিক $AGKL = \Delta ADE$

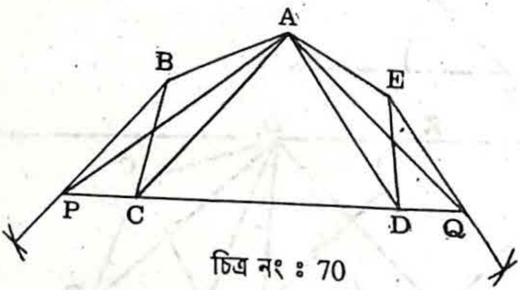
$\therefore$ সামান্তরিক $AGKL$ = চতুর্ভুজ $ABCD$.

2. একটি পঞ্চভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর।

ধরা যাক, $ABCDE$ একটি পঞ্চভুজ।

$ABCDE$ পঞ্চভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কন প্রণালী : AC ও AD দুটি কর্ণ টানা হল। B বিন্দু দিয়ে AC-এর এবং E বিন্দু দিয়ে AD-এর সমান্তরাল অঙ্কন করা হল। বর্ধিত DC প্রথম সমান্তরাল সরলরেখাটিকে P বিন্দুতে এবং বর্ধিত CD দ্বিতীয় সমান্তরাল সরলরেখাটিকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। A, P ও A, Q যুক্ত করা হল।



চিত্র নং : 70

তাহলে ΔAPQ উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : ΔAPC ও ΔABC একই ভূমি AC এবং একই সমান্তরাল যুগল AC ও BP এর মধ্যে অবস্থিত,

$\therefore \Delta APC = \Delta ABC$.

আবার, ΔAQD ও ΔAED একই ভূমি AD এবং একই সমান্তরাল যুগল AD ও EQ এর মধ্যে অবস্থিত,

$\therefore \Delta AQD = \Delta AED$.

$\therefore \Delta APC + \Delta ACD + \Delta AQD = \Delta ABC + \Delta ACD + \Delta AED$.

$\therefore \Delta APQ$ = পঞ্চভুজ $ABCDE$.

অনুশীলনী 15

[প্রতি ক্ষেত্রে অঙ্কন প্রণালী লিখবে ও তা প্রমাণ করবে ।]

1. $ABCD$ চতুর্ভুজের $AB = 3$ সেমি, $BC = 4$ সেমি, $CD = 4{\cdot}2$ সেমি, $DA = 3{\cdot}8$ সেমি এবং কর্ণ $AC = 6$ সেমি ; চতুর্ভুজটি অঙ্কন কর । এই চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর ।

2. $ABCD$ চতুর্ভুজের $BC = 6$ সেমি, $AB = 4$ সেমি, $CD = 3$ সেমি, $\angle ABC = 60°$, $\angle BCD = 45°$; চতুর্ভুজটি অঙ্কন কর । এই চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর, যার একটি বাহু AB এবং অপর একটি বাহু ও BC একই সরলরেখায় অবস্থিত থাকে ।

3. $ABCD$ চতুর্ভুজের $BC = 6{\cdot}3$ সেমি, $CD = 4$ সেমি, BD কর্ণ $= 10$ সেমি, $\angle ADB = 45°$ এবং $\angle ABC = 75°$; চতুর্ভুজটি অঙ্কন কর । এই চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কন কর ।

4. $ABCD$ একটি আয়তক্ষেত্র, যার $AB = 5$ সেমি ও $BC = 3$ সেমি । আয়তক্ষেত্রটি অঙ্কন কর ও তার সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর ।

5. $ABCDE$ যেকোনো একটি পঞ্চভুজ অঙ্কন কর ও তার সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর, যার একটি শীর্ষবিন্দু C.

6. 5 সেমি বাহু বিশিষ্ট একটি বর্ণক্ষেত্র অঙ্কন কর । এই বর্গক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর ।

7. $ABCD$ চতুর্ভুজের AB বাহুর উপর AD ও BC লম্ব এবং $AB = 5$ সেমি, $AD = 7$ সেমি ও $BC = 4$ সেমি । চতুর্ভুজটি অঙ্কন কর । ওই চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর, যার একটি কোণ 30°.

বিবিধ প্রশ্নমালা 1

নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির কয়েকটি সম্ভাব্য উত্তর বন্ধনীর ভেতরে দেওয়া আছে। সঠিক উত্তরটি বেছে নিয়ে লেখ। তোমার উত্তরের সমর্থনে যুক্তি দাও।

1. $ABCD$ একটি সামান্তরিক, যার $AB = 5$ সেমি, $BC = 3$ সেমি, $\angle ABC = 105°$,

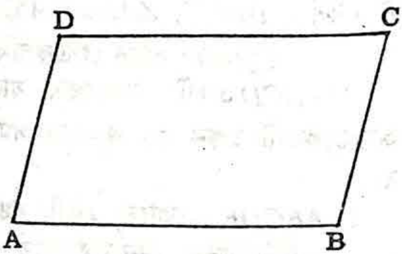
$CD =$ কত ? (5 সেমি, 3 সেমি, 2·5 সেমি, 1·5 সেমি)

$AD =$ কত ? (5 সেমি, 3 সেমি, 2·5 সেমি, 1·5 সেমি)

$\angle BAD =$ কত ? (105°, 75° 52·5°, 37·5°)

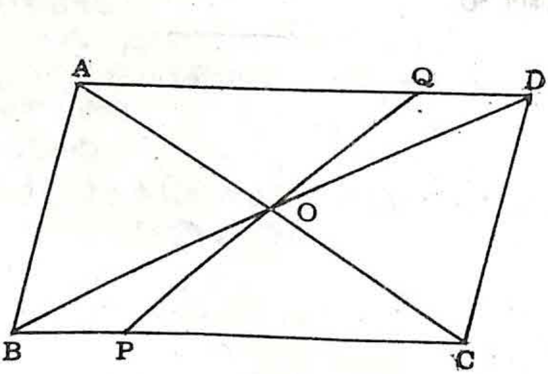
$\angle BCD =$ কত ? (105°, 75°, 52·5°, 37·5°)

$\angle CDA =$ কত ? (105°, 75°, 52·5°, 37·5°)



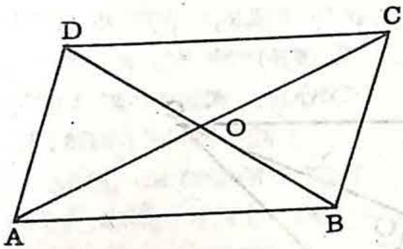
চিত্র নং ঃ 71

2. $ABCD$ একটি সামান্তরিক, যার $AD = 7$ সেমি, $AB = 4$ সেমি ; $PO = 3$ সেমি।



চিত্র নং ঃ 72

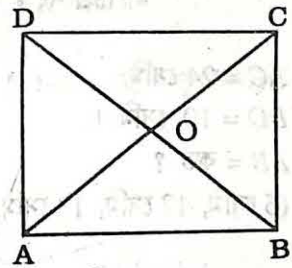
$PQ =$ কত ? (7 সেমি, 6 সেমি, 4 সেমি, 3 সেমি)



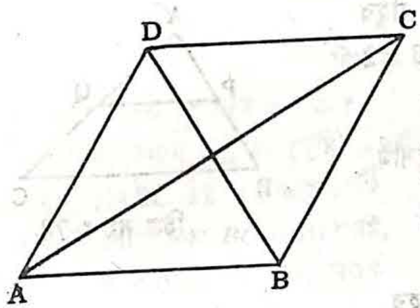
চিত্র নং : 73

3. $ABCD$ চতুর্ভুজের $AO = OC$, $BO = OD$. $AB = 5$ সেমি, $AD = 3$ সেমি । $DC =$ কত ?
(5 সেমি, 4 সেমি, 3 সেমি, 2·5 সেমি)

4. $ABCD$ একটি আয়তক্ষেত্র, যার $AB = 4$ সেমি, $OD = 2·5$ সেমি ।
$BC =$ কত ?
(4 সেমি, 2·5 সেমি, 5 সেমি, 3 সেমি)



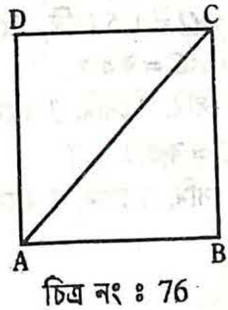
চিত্র নং : 74



চিত্র নং : 75

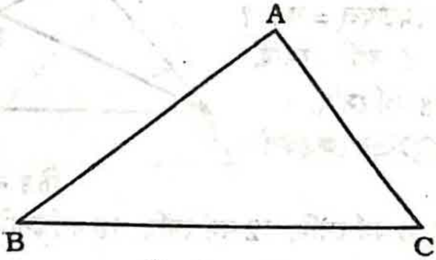
5. $ABCD$ রম্বসের $\angle BAD = 60°$, $BC = 4$ সেমি ।
$BD =$ কত ?
(2 সেমি, 4 সেমি, 5 সেমি, 6 সেমি)

6. $ABCD$ একটি বর্গক্ষেত্র ।
$\angle BAC =$ কত ?
(30°, 45°, 60°)



চিত্র নং : 76

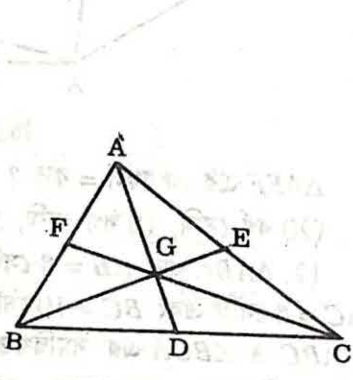
13. ΔABC-এর $AB = 4$ সেমি, $BC = 5$ সেমি, $CA = 3$ সেমি ; AB ও BC-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক দুটি পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।



চিত্র নং : 83

$BO =$ কত ?
(1 সেমি, 1·5 সেমি, 2 সেমি, 2·5 সেমি)
$AO =$ কত ?
(1 সেমি, 2 সেমি, 2·5 সেমি, 1·5 সেমি)

14. ΔABC-এর AD, BE মধ্যমা দুটি G বিন্দুতে ছেদ করেছে। বর্ধিত CG, AB-কে F বিন্দুতে ছেদ করেছে। $AB = CF = 6$ সেমি। ΔABC-এর ক্ষেত্রফল 9 বর্গ সেমি।



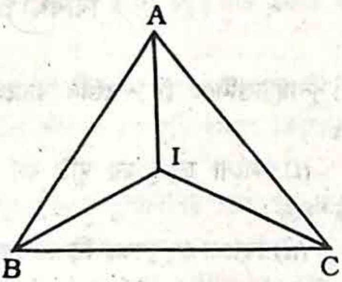
চিত্র নং : 84

$AF =$ কত ?
(3 সেমি, 2 সেমি, 1·5 সেমি, 1 সেমি)
$GF =$ কত ?
(3 সেমি, 2 সেমি, 1·5 সেমি, 1 সেমি)
ΔGBC-এর ক্ষেত্রফল = কত ?
(6 বর্গ সেমি, 4·5 বর্গ সেমি, 3 বর্গ সেমি, 1·5 বর্গ সেমি)

ΔGEA এর ক্ষেত্রফল = কত ? (6 বর্গ সেমি, 4·5 বর্গ সেমি, 3 বর্গ সেমি, 1·5 বর্গ সেমি)

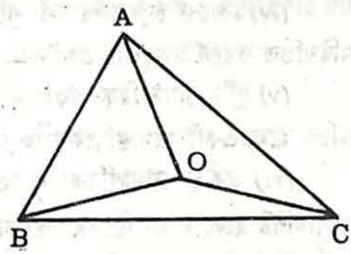
চতুর্ভুজ $BDGF$-এর ক্ষেত্রফল = কত ?
(6 বর্গ সেমি, 4·5 বর্গ সেমি, 3 বর্গ সেমি, 1·5 বর্গ সেমি)

15. ΔABC-এর $\angle ABC$ ও $\angle BCA$-এর সমদ্বিখণ্ডক I বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করেছে।
$\angle ABC = 60°$,
$\angle BCA = 50°$;
$\angle BIC =$ কত ?
(160°, 150°, 140°, 125°)



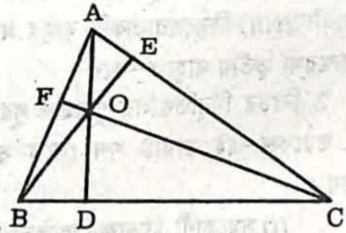
চিত্র নং : 85

16. ΔABC-এর $\angle ABC = 65°$, $\angle BCA = 40°$, বাহুগুলির লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের ছেদবিন্দু O;
$\angle BOC =$ কত ?
(105°, 125°, 150°, 165°)



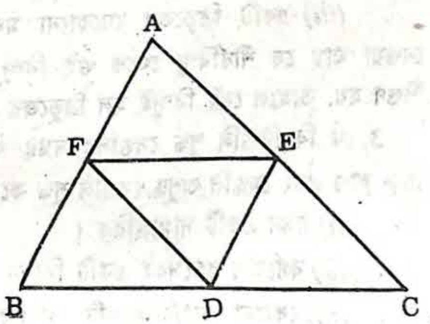
চিত্র নং : 86

17. ΔABC-এর $\angle ABC = 70°$, $\angle BAC = 75°$, $AD \perp BC$, $BE \perp AC$ এবং $CF \perp AB$;
$\angle BOA =$ কত ?
(105°, 110°, 125°, 145°)



চিত্র নং : 87

18. ΔABC-এর BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F; ΔABC-এর ক্ষেত্রফল 12 বর্গ সেমি;
ΔDEF-এর ক্ষেত্রফল = কত ?
(3 বর্গ সেমি, 4 বর্গ সেমি, 6 বর্গ সেমি, 8 বর্গ সেমি)



চিত্র নং : 88

বিবিধ প্রশ্নমালা 2

1. শূন্যস্থানগুলিতে যে শব্দগুলি বসালে বিবৃতিগুলি সঠিক হবে সেগুলি খাতায় লেখ ঃ

(i) কোনো চতুর্ভুজের দুটি কর্ণ পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে, চতুর্ভুজটি একটি–হবে।

(ii) কোনো চতুর্ভুজের তিনটি কোণ সমকোণ হলে, চতুর্ভুজটি একটি–হবে।

(iii) কোনো চতুর্ভুজের কর্ণ দুটি অসমান হলে এবং তারা পরস্পরকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করলে, চতুর্ভুজটি একটি–হবে।

(iv) কোনো চতুর্ভুজের কর্ণ দুটি সমান হলে এবং তারা পরস্পরকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করলে চতুর্ভুজটি একটি — হবে।

(v) দুটি সামান্তরিক একই ভূমিবিশিষ্ট ও একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত হলে, একটি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল অপর সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের–হবে।

(vi) একটি সামান্তরিক ও একটি ত্রিভুজ একই ভূমিবিশিষ্ট ও একই উচ্চতাবিশিষ্ট হলে, সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের–হবে।

(vii) ত্রিভুজের দুটি বাহুর মধ্যবিন্দু দুটির সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর–এবং তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য সংযোজক রেখাংশের দৈর্ঘ্যের– ।

(viii) ত্রিভুজের একটি বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত দ্বিতীয় বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা তৃতীয় বাহুকে–করে।

2. নিচের বিবৃতিগুলির শূন্যস্থান পুরণ করার জন্য পরিকেন্দ্র, অন্তঃকেন্দ্র, লম্ববিন্দু, ও ভরকেন্দ্র–এই চারটি শব্দ থেকে সঠিক শব্দটি বেছে নিয়ে নিজ নিজ খাতায় লেখ ঃ

(i) সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দুই হল ত্রিভুজের– ।

(ii) সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দুটিই হ'ল ত্রিভুজের– ।

(iii) একটি ত্রিভুজের যেকোনো মধ্যমার উপর যদি এমন একটি বিন্দু নেওয়া যায় যে শীর্ষবিন্দু থেকে ওই বিন্দু পর্যন্ত মধ্যমার অংশটি অপর অংশের দ্বিগুণ হয়, তাহলে সেই বিন্দুই হল ত্রিভুজের — ।

3. যে বিবৃতিগুলি শুদ্ধ সেগুলির নম্বর খাতায় লিখে তাদের পাশে (√) টিক চিহ্ন দাও এবং যেগুলি অশুদ্ধ সেগুলি শুদ্ধ করে লেখ ঃ

(i) রম্বস একটি সামান্তরিক।

(ii) বর্গক্ষেত্র রম্বসেরই একটি বিশেষ রূপ।

(iii) কোনো চতুর্ভুজের দুটি কর্ণ পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত হলে চতুর্ভুজটি একটি রম্বস হবে।

(*iv*) কোনো চতুর্ভুজের চারিটি বাহুই সমান হলে, চতুর্ভুজটি একটি বর্গক্ষেত্র হবে।

(*v*) একটি ত্রিভুজের একটি মধ্যমার মধ্যবিন্দু ও অপর কোনো শীর্ষবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা ঐ শীর্ষবিন্দুর বিপরীত বাহুকে যে দুটি অংশে বিভক্ত করে, তার একটি অংশ অপর অংশের অর্ধেক।

(*vi*) সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট দুটি ত্রিভুজ একই ভূমিবিশিষ্ট হলে, ত্রিভুজ দুটির শীর্ষবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা ভূমির সমান্তরাল হবে।

(*vii*) একটি সামান্তরিক ও একটি আয়তক্ষেত্র একই ভূমিবিশিষ্ট এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত হলে, তাদের ক্ষেত্রফল সমান হবে।

4. নিচে বাঁদিকের স্তম্ভের একটি অংশ এবং ডানদিকের স্তম্ভ থেকে একটি অংশ নিয়ে সঠিক বাক্যগুলি গঠন কর (একটি অংশ একবারই নেওয়া যাবে) ঃ

বর্গক্ষেত্র	চতুর্ভুজের বিশেষ রূপ
রম্বস	সামান্তরিকের বিশেষ রূপ
সামান্তরিক	সামান্তরিকের বিশেষ রূপ
আয়তক্ষেত্র	আয়তক্ষেত্রের বিশেষ রূপ

5. নিচে বাঁদিকের স্তম্ভে কয়েকটি চতুর্ভুজের নাম দেওয়া আছে, আর ডানদিকের স্তম্ভে দেওয়া আছে বাঁদিকের স্তম্ভের চতুর্ভুজগুলির বাহুগুলির মধ্যবিন্দু পর পর যোগ করে যে চতুর্ভুজগুলি পাওয়া যাবে তাদের নাম, কিন্তু এলোমেলো ভাবে। ডানদিকের স্তম্ভটি সাজিয়ে লেখ।

(1) চতুর্ভুজ	(1) বর্গক্ষেত্র
(2) সামান্তরিক	(2) রম্বস
(3) আয়তক্ষেত্র	(3) আয়তক্ষেত্র
(4) বর্গক্ষেত্র	(4) সামান্তরিক
(5) রম্বস	(5) সামান্তরিক

বিবিধ প্রশ্নমালা 3

1. $ABCD$ একটি সামান্তরিক, যার $\angle BAD$-এর সমদ্বিখণ্ডক $\angle DCB$-কেও সমদ্বিখণ্ডিত করে। প্রমাণ কর যে, $ABCD$ একটি রম্বস।

2. $ABCD$ সামান্তরিকের $\angle BAD$ ও $\angle DCB$-এর সমষ্টি দুই সমকোণের সমান। প্রমাণ কর যে, $ABCD$ একটি আয়তক্ষেত্র।

3. প্রমাণ কর যে, $PQRS$ রম্বসের QS কর্ণ $\angle PSR$ ও $\angle RQP$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

4. একটি আয়তক্ষেত্রের কর্ণ দুটি পরস্পর লম্ব। প্রমাণ কর যে, আয়তক্ষেত্রটি একটি বর্গক্ষেত্র।

5. $ABCD$ সামান্তরিকের BD কর্ণ AB-এর উপর লম্ব। P ও Q যথাক্রমে AD ও BC-এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর যে, $BPDQ$ একটি রম্বস।

6. $ABCD$ সামান্তরিকের $AB>AD$. AB-এর উপর P এমন একটি বিন্দু নেওয়া হল যে $AP=AD$. প্রমাণ কর যে, DP, $\angle ADC$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে। বর্ধিত AB-এর উপর এমন একটি বিন্দু Q নির্ণয় কর যে, QD, $\angle AQC$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

7. $ABCD$ ও $ABEF$ সামান্তরিক দুটি একই ভূমিবিশিষ্ট এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত। $ABCD$ সামান্তরিকের কর্ণ দুটির ছেদবিন্দু P এবং $ABEF$ সামান্তরিকের কর্ণ দুটির ছেদবিন্দু Q. প্রমাণ কর যে $PQ \parallel AB$.

8. ΔABC ও ΔABD-এর ক্ষেত্রফল সমান এবং তারা AB-এর একই পার্শ্বে অবস্থিত। ΔABC-এর ভরকেন্দ্র G এবং ΔABD-এর ভরকেন্দ্র H. প্রমাণ কর যে, $GH \parallel AB$.

9. ΔABC ও ΔABD-এর ক্ষেত্রফল সমান এবং তারা AB-এর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। প্রমাণ কর যে, AB, CD কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

10. আয়তক্ষেত্র $ABCD$ ও সামান্তরিক $ABEF$-এর ক্ষেত্রফল সমান এবং তারা AB-এর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। F বিন্দু থেকে BA সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্ব বর্ধিত BA-কে G বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $ADGF$ একটি সামান্তরিক।

11. একই ভূমির উপর অবস্থিত সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজগুলির মধ্যে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজটির পরিসীমাই সর্বাপেক্ষা ছোট—প্রমাণ কর।

12. ΔABC-এর মধ্যে O যেকোনো একটি বিন্দু ; AB, BC ও CA-কে কর্ণ করে যথাক্রমে $OAPB$, $OBQC$ ও $OCRA$ সামান্তরিকগুলি অঙ্কন করা হল। প্রমাণ কর যে, $\Delta ABC \cong \Delta QPR$.

13. $ABCD$ একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম, যার AD ও BC তির্যক বাহু। প্রমাণ কর যে, DC-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক AB-এরও লম্ব সমদ্বিখণ্ডক হবে। AD-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক পূর্বের লম্ব সমদ্বিখণ্ডকটিকে O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $OA = OB = OC = OD$.

14. বিভিন্ন সামতলিক চিত্রের প্রত্যেকটির কয়েকটি বিশেষ ধর্ম বর্তমান। তার একটি ধর্মকে ভিত্তি করে সামতলিক চিত্রগুলির সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে। যদি অন্য

কোনো ধর্মের উপর ভিত্তি করে সংজ্ঞা দেওয়া হতো, তাহলে পূর্বের সংজ্ঞাটি যে ধর্মের উপর ভিত্তি করে দেওয়া হয়েছিল সেই ধর্মটি প্রমাণ করতে হতো ।

আমরা নিচে এরূপ কয়েকটি সংজ্ঞা ধরে নিলাম ঃ

(a) যে চতুর্ভুজের দুটি কর্ণ পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে সেটি সামান্তরিক ।

(b) যে চতুর্ভুজের কর্ণ দুটি পরস্পর সমান এবং তারা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে সেটি আয়তক্ষেত্র ।

(c) যে চতুর্ভুজের কর্ণ দুটি পরস্পর অসমান এবং তারা পরস্পরকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে সেটি রম্বস ।

(d) যে চতুর্ভুজের কর্ণ দুটি পরস্পর সমান এবং তারা পরস্পরকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে তারা বর্গক্ষেত্র ।

উপরে প্রদত্ত সংজ্ঞাগুলি ধরে নিয়ে নিম্নে প্রদত্ত ধর্মগুলি প্রমাণ কর ঃ

(i) সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল ।

(ii) আয়তক্ষেত্রের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল এবং প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ ।

(iii) রম্বসের বাহুগুলি পরস্পর সমান ।

(iv) বর্গক্ষেত্রের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল, বাহুগুলি পরস্পর সমান এবং প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ ।

15. উপপাদ্য 26 প্রমাণ করতে গিয়ে নিম্নোক্ত উপায়ে ΔBEC ও ΔAFD (চিত্র নং 34) সর্বসম প্রমাণ করেছ ।

$\angle BEC =$ অনুরূপ $\angle AFD$ [$\because BE \parallel AF$]

$\angle BCE =$ অনুরূপ $\angle ADF$ [$\because AD \parallel BC$]

$BE = AF$; [সামান্তরিকের বিপরীত বাহু]

$\therefore \Delta BEC \cong \Delta AFD$.

কোন ছাত্র যদি উপরের উপায়ে প্রমাণ না করে নিচের উপায়ে প্রমাণ করতে অগ্রসর হতো তাহলে তা কি যুক্তিসিদ্ধ হতো ?

$BC = AD$, [সামান্তরিকের বিপরীত বাহু]

$BE = AF$, [সামান্তরিকের বিপরীত বাহু]

$\angle BEC =$ অনুরূপ $\angle AFD$; [$\because BE \parallel AF$]

$\therefore \Delta BEC \cong \Delta AFD$.

তোমার উত্তরের সমর্থনে যুক্তি দাও ।

যদি তোমার মতে প্রমাণটি সিদ্ধ না হয়, তাহলে বাহুগুলি সমান ধরে নিয়ে তুমি কি ত্রিভুজ দুটি সর্বসম প্রমাণ করতে পার ? চেষ্টা করে দেখ তো ।

বিবিধ প্রশ্নমালা 4

1. নিম্নে প্রদত্ত শর্তানুসারে কোন কোন ক্ষেত্রে $ABCD$ চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হবে ?

(i) $AB = DC$ এবং $AB \parallel DC$.

(ii) $AB = DC$ এবং $AD = BC$.

(iii) $AB = DC$ এবং $\angle ADC = \angle ABC$.

(iv) $AB \parallel DC$ এবং $\angle ADC = \angle ABC$.

(v) $\angle ADC = \angle ABC$ এবং $\angle DAB = \angle DCB$.

(vi) $AB \parallel DC$ এবং $AD \parallel BC$.

(vii) AC ও BD পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে ।

(viii) $\Delta ADC \cong \Delta ABC$ অথবা $\Delta BAD \cong \Delta BCD$.

(ix) $\Delta ADC \cong \Delta ABC$ এবং $\Delta BAD \cong \Delta BCD$.

(x) $\Delta ADC = \Delta BDC$ এবং $AD = BC$. (ত্রিভুজ দুটি DC-এর একই পার্শ্বে অবস্থিত)।

(xi) $\Delta ADC = \Delta BDC$ এবং $AB = DC$ (ত্রিভুজ দুটি DC-এর একই পার্শ্বে অবস্থিত)।

2. $ABCD$ চতুর্ভুজটি কোন ক্ষেত্রে কোন ধরণের চতুর্ভুজ হবে, যদি AC ও BD নিম্নলিখিত শর্তে পরস্পরকে ছেদ করে ?

(i) AC ও BD অসমান ও এরা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে ।

(ii) AC, BD-কে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে ।

(iii) AC ও BD অসমান এবং এরা পরস্পরকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(iv) AC ও BD সমান ও এরা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে ।

(v) AC ও BD সমান এবং এরা পরস্পরকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে ।

(vi) AC ও BD সমান এবং এরা পরস্পরকে এমনভাবে O বিন্দুতে ছেদ করে যে, $AO = BO$, $CO = DO$.

3. ΔABC-এর $\angle A$ সমকোণ এবং $\angle C = 30^\circ$; $BC = 8$ সেমি হলে, AB রেখাংশের দৈর্ঘ্য কত ?

4. নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও ঃ

(i) ΔABC-এর AB বাহু ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E. D বিন্দুগামী BC-এর সমান্তরাল সরলরেখার সঙ্গে DE সরলরেখার সম্পর্ক কি ?

(ii) ΔABC-এর $AB = AC$ এবং BC, CA ও AB বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F. EF সরলরেখার সঙ্গে AD সরলরেখার সম্পর্ক কি ?

(iii) ΔABC-এর BC, CA ও AB বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F ; BE ও CF পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। A, O, D বিন্দু তিনটির মধ্যে সম্পর্ক কি ?

(iv) একটি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র, লম্ববিন্দু, পরিকেন্দ্র ও অন্তঃকেন্দ্র সমরেখ হলে ত্রিভুজটি কি ধরনের ত্রিভুজ ?

(v) একটি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র, লম্ববিন্দু, পরিকেন্দ্র ও অন্তঃকেন্দ্র একই বিন্দু হলে ত্রিভুজটি কি ধরনের ত্রিভুজ ?

(vi) $ABCD$ সামান্তরিকের AC কর্ণের মধ্যবিন্দু O ; $\angle BOD$-এর মান কত হবে ?

(vii) ΔABC-এর AB বাহু ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E. D বিন্দুগামী BC-এর সমান্তরাল সরলরেখা ও E বিন্দুগামী BA-এর সমান্তরাল সরলরেখা পরস্পরকে কোন বিন্দুতে ছেদ করবে ?

(viii) $ABCD$ সামান্তরিকের BD কর্ণের দৈর্ঘ্য 6 সেমি। P ও Q যথাক্রমে ΔABC ও ΔADC-এর ভরকেন্দ্র। PQ রেখাংশের দৈর্ঘ্য কত ?

(ix) ΔABC-এর AD মধ্যমাকে E বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যে DE যেন AD-এর সমান হয়। ΔABC-এর AB, BC ও CA বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 5 সেমি, 7 সেমি ও 9 সেমি। EB ও EC রেখাংশ দুটির কোনটির দৈর্ঘ্য কত ?

(x) ΔABC-এর $AB = AC$ এবং BC-এর মধ্যবিন্দু D. $\angle B$ ও $\angle C$-এর সমদ্বিখণ্ডক পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। A, O, D বিন্দু তিনটির মধ্যে সম্পর্ক কি ?

5. নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও ঃ

(i) AB সরলরেখার বহিঃস্থ কোনো বিন্দু O থেকে AB পর্যন্ত যত রেখাংশ টানা যায়, তার মধ্যে OP ক্ষুদ্রতম। OP-এর সঙ্গে AB-এর সম্পর্ক কি ?

(ii) AB সরলরেখার উপরিস্থিত একটি বিন্দু Q এবং P, R বিন্দু দুটি সরলরেখার বহিঃস্থ। PQ এবং RQ উভয়েই AB সরলরেখার উপর লম্ব। PQ ও RQ-এর মধ্যে সম্পর্ক কি ?

(iii) ΔABC ও ΔDBC এমনভাবে অবস্থিত যে $AD \parallel BC$. ত্রিভুজ দুটির ক্ষেত্রফলের মধ্যে সম্পর্ক কি ?

(iv) ΔABC ও ΔDBC-এর ক্ষেত্রফল সমান এবং A ও D বিন্দু BC-এর একই পার্শ্বে অবস্থিত। AD ও BC সরলরেখা দুটির মধ্যে সম্পর্ক কি ?

(v) দুটি ত্রিভুজের একই শীর্ষবিন্দু এবং তাদের ভূমি একই সরলরেখায় অবস্থিত। তাদের উচ্চতার মধ্যে সম্পর্ক কি ?

বিবিধ প্রশ্নমালা 5

1. ΔABC-এর AB ও BC বাহুর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন কর। সেই লম্ব সমদ্বিখণ্ডক দুটির ছেদবিন্দুর নাম দাও O. বলতো OA, OB ও OC-এর মধ্যে সম্পর্ক কি ?

2. ΔABC-এর $\angle B$ ও $\angle C$-এর সমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন কর। সেই সমদ্বিখণ্ডক দুটি যে বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করেছে তার নাম দাও I. I থেকে BC, CA ও AB-এর উপর লম্ব অঙ্কন কর। ঐ লম্বদৈর্ঘ্যগুলির মধ্যে কি সম্পর্ক বলতো ?

3. AB সরলরেখার A বিন্দুতে ওই সরলরেখার উপর লম্ব অঙ্কন কর।

4. AB-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন কর। লম্ব সমদ্বিখণ্ডক AB-কে যে বিন্দুতে ছেদ করল, তার নাম দাও C. CA ব্যাসার্ধ নিয়ে C-কে কেন্দ্র করে একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন কর।

5. a ও b এমন দুটি রেখাংশ অঙ্কন কর যে $a > b$ হয়।

(i) P একটি বিন্দু নিয়ে তাকে কেন্দ্র করে a-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন কর। এবার অপর একটি এককেন্দ্রীয় বৃত্ত অঙ্কন কর, যার ব্যাসার্ধ $(a - b)$-এর সমান।

(ii) Q একটি বিন্দু নিয়ে তাকে কেন্দ্র করে b-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন কর। এবার অপর একটি এককেন্দ্রীয় বৃত্ত অঙ্কন কর, যার ব্যাসার্ধ $(a + b)$-এর সমান।

6. 9 সেমি দৈর্ঘ্যের একটি রেখাংশ AB অঙ্কন কর। AB রেখাংশকে সমদ্বিখণ্ডিত কর। ওই রেখাংশের মধ্যবিন্দুর নাম দাও O. O-কে কেন্দ্র করে OA ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন কর। AB থেকে 6 সেমি দৈর্ঘ্যের একটি রেখাংশ AC কেটে নাও। C বিন্দুতে AB রেখাংশের উপর লম্ব অঙ্কন কর।

7. AB একটি রেখাংশ অঙ্কন কর, যার দৈর্ঘ্য 9 সেমি। AB থেকে 6 সেমি দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি রেখাংশ AC কেটে নাও। AB ও AC-কে সমদ্বিখণ্ডিত কর। যে বিন্দু দুটিতে সমদ্বিখণ্ডিত হল, যথাক্রমে তাদের নাম দাও P ও Q. AQ-কে বাহু করে একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন কর, যার অতিভুজের দৈর্ঘ্য AP-এর দৈর্ঘ্যের সমান।

8. 6 সেমি বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র $ABCD$ অঙ্কন কর। ঐ বর্গক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন কর, *(i)* যার ভূমি ও বর্গক্ষেত্রের BC বাহু একই সরলরেখায় অবস্থিত হয়, *(ii)* যার ভূমি হবে বর্গক্ষেত্রের AC কর্ণ।

বিবিধ প্রশ্নমালা 6

1. প্রমাণ কর যে, AB রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত যেকোনো বিন্দু A ও B সমদূরবর্তী।

2. PQ ও RS সরলরেখা দুটি যথাক্রমে AB ও BC রেখাংশ দুটির লম্ব সমদ্বিখণ্ডক। $PQ \parallel RS$ হলে, প্রমাণ কর যে, A, B, C সমরেখ এবং AC-এর দৈর্ঘ্য PQ ও RS সরলরেখা দুটির মধ্যেকার দূরত্বের দ্বিগুণ।

3. PQ ও PR সরলরেখা দুটি যথাক্রমে AB ও BC রেখাংশ দুটির লম্ব সমদ্বিখণ্ডক। প্রমাণ কর যে, $\angle APC = 2\angle QPR$.

4. প্রমাণ কর যে, একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়মের সমান্তরাল বাহু দুইটির যেকোনোটি সংলগ্ন কোণ দুটি পরস্পর সমান।

5. একটি ট্রাপিজিয়মের বাহু দুটির যেকোনোটির সংলগ্ন কোণ দুটি পরস্পর সমান হলে, প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়মটি সমদ্বিবাহু।

6. $ABCD$ একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম, যার $AB < DC$; DA ও CB-কে বর্ধিত করায় তারা P বিন্দুতে মিলিত হল। প্রমাণ কর যে, $PA = PB$.

7. ΔABC-এর অভ্যন্তরে O এমন একটি বিন্দু যে, $OA = OB = OC$. 'ত্রিভুজের তিনটি কোণের মানের সমষ্টি দুই সমকোণ'—এই ধর্মটি ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে, $\angle BOC = 2\angle BAC$.

8. ΔACB-এর মধ্যমা $CO = \frac{1}{2}AB$. প্রমাণ কর যে, $\angle ACB = 1$ সমকোণ।

9. $ABCD$ চতুর্ভুজটির $AB = AD$ এবং $AD \perp DC$ ও $AB \perp BC$. প্রমাণ কর যে, $BC = DC$.

10. ΔABC-এর BC বাহুর সমান্তরাল একটি সরলরেখা AB ও AC-কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, ΔABC ও ΔAPQ সদৃশকোণী।

[তোমরা পূর্বেই জেনেছ যে, দুটি ত্রিভুজের একটির তিনটি কোণ অপরটির তিনটি কোণের সমান হলে, ত্রিভুজ দুটিকে সদৃশকোণী বলা হয়।]

11. ΔPQR-এর QR বাহুর সমান্তরাল একটি সরলরেখা PQ ও PR-কে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করে। Q, Y ও R, X যুক্ত কর। QY ও RX পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, (i) $\Delta PYQ = \Delta PXR$ (ii) $\Delta QOX = \Delta ROY$.

12. ΔABC-এর $\angle A$ সমকোণ। AD, BC বাহুর উপর লম্ব। $\angle DAC$-এর পূরক কোণ দুটির নাম লেখ। সেই দুটি কোণের মধ্যে কি সম্পর্ক ? $\angle ACD$-এর পূরক কোণ দুটির নাম লিখে তাদের মধ্যে কি সম্পর্ক বল। এবার প্রমাণ কর যে, ΔABD ও ΔCAD সদৃশকোণী।

13. তিনটি সরলরেখার যেকোনো দুটি পরস্পর সমান্তরাল। তাদের যেকোনো দুটি ভেদকের প্রত্যেকটির খণ্ডিতাংশ দুটি পরস্পর সমান হলে, প্রমাণ কর যে, তিনটি সরলরেখাই পরস্পর সমান্তরাল।

14. $ABCD$ সামন্তরিকের AB ও AD বাহু দুটির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q. ΔADC ও ΔABC-এর ভরকেন্দ্র যথাক্রমে R ও S. $PQRS$ চতুর্ভুজটি কি ধরনের চতুর্ভুজ ? তোমার উত্তরের সমর্থনে যুক্তি দাও।

15. ΔABC-এর AC বাহুর উপর D যেকোনো একটি বিন্দু। AD, DC, BC ও AB-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E, F, G, H প্রমাণ কর যে, EG ও FH পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

16. AB ও CD দুটি সমান্তরাল রেখাংশ। CD-এর মধ্যবিন্দু E. AC ও BE বর্ধিত করলে F বিন্দুতে এবং AE ও BD বর্ধিত করলে G বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $FG \parallel AB$.

17. ABC ত্রিভুজের BC বাহুর উপর D যেকোনো একটি বিন্দু। D বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত CA ও BA-এর সমান্তরাল সরলরেখা যথাক্রমে BA ও CA-কে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $\Delta FBD = \Delta EDC$.

18. ΔABC সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, যার $\angle B$ সমকোণ। $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করে। D বিন্দু থেকে AC-এর উপর DE লম্ব অঙ্কন করা হল। প্রমাণ কর যে, ΔDEC-ও সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

19. $ABCD$ একটি বর্গক্ষেত্র। AB, BC, CD, DA-এর উপর যথাক্রমে E, F, G, H বিন্দুগুলি এমনভাবে নেওয়া হল যে, $AE = BF = CG = DH$. প্রমাণ কর যে, $EFGH$ একটি বর্গক্ষেত্র।

20. প্রমাণ কর যে, একটি রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত যেকোনো বিন্দু থেকে রেখাংশের প্রান্তবিন্দু দুটি সমদূরবর্তী।

21. প্রমাণ কর যে, দুটি পরস্পরছেদী সরলরেখার অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত যেকোনো বিন্দু সরলরেখা দুটি থেকে সমদূরবর্তী।

22 প্রমাণ কর যে, একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়মের চারটি বাহুর লম্ব সমদ্বিখণ্ডিকগুলি সমবিন্দু।

23. দুটি ত্রিভুজের একটির দুটি বাহু এবং যেকোনো একটি বাহুর বিপরীত কোণ, অপরটির দুটি বাহু এবং অনুরূপ কোণের সমান। প্রমাণ কর যে, অপর বাহু দুটির বিপরীত কোণ পরস্পর সমান অথবা সম্পূরক। শেষোক্ত কোণ দুটির প্রত্যেকটি যদি সূক্ষ্মকোণ বা স্থূলকোণ হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, তারা অবশ্যই সমান হবে। সেক্ষেত্রে ত্রিভুজ দুটির মধ্যে সম্পর্ক কি হবে ?

চতুর্থ অধ্যায়

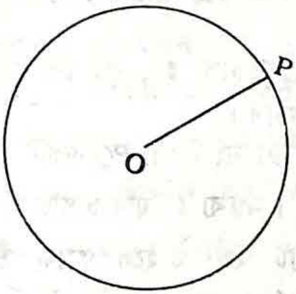
বৃত্ত

2.1 তোমরা পূর্বেই বৃত্তের সঙ্গে পরিচিত হয়েছ। বৃত্তের ধারণা তোমাদের হয়েছে। এখন বৃত্তের একটি সংজ্ঞা দেওয়া যায়।

সংজ্ঞা ঃ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সমদূরে অবস্থিত বিন্দুসমূহদ্বারা গঠিত সামতলিক চিত্রকে আমরা বৃত্ত বলব।

বৃত্তের সঙ্গে সংশ্লিষ্ট আরও কয়েকটি শব্দের কোনটি কি জ্যামিতিক অর্থ বহন করে তাও তোমরা ষষ্ঠ শ্রেণীতে শিখেছ। সেগুলির এখানে পুনরুল্লেখ করা হচ্ছে।

কেন্দ্র ঃ যে নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে বৃত্তের উপরিস্থিত বিন্দুগুলি সমান দূরে অবস্থিত, সেই নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে বলা হয় বৃত্তের কেন্দ্র। 89নং চিত্রে, O হল বৃত্তের কেন্দ্র।



চিত্র নং ঃ 89

[মন্তব্য ঃ কোনো সামতলিক চিত্রের সীমারেখা ও অভ্যন্তর বলতে কি বোঝায় তা তোমরা নবম শ্রেণীতে জেনেছ। বৃত্তের কেন্দ্র বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত। যে বক্ররেখাটি দিয়ে বৃত্ত গঠিত সেটি বৃত্তাকার চিত্রের সীমারেখা।]

পরিধি ঃ বৃত্তের সীমারেখার দৈর্ঘ্যকে বলা হয় বৃত্তের পরিধি।

ব্যাসার্ধ ঃ কেন্দ্র থেকে বৃত্তের উপরিস্থিত যেকোনো বিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত রেখাংশকে বলা হয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ। 89 নং চিত্রে, P বৃত্তের উপরিস্থিত যেকোনো একটি বিন্দু। OP হল বৃত্তের একটি ব্যাসার্ধ।

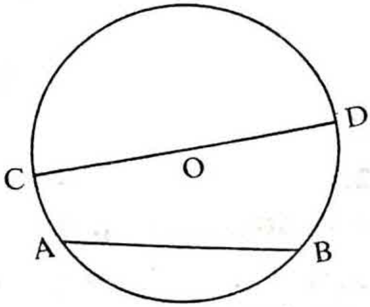
বৃত্তের সংজ্ঞা থেকেই আমরা বলতে পারি একই বৃত্তের সকল ব্যাসার্ধই দৈর্ঘ্যে সমান।

[মন্তব্য ঃ কেন্দ্র থেকে যে বিন্দুর দূরত্ব ব্যাসার্ধের কম, তা বৃত্তের অভ্যন্তরে ; যে বিন্দুর দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান, তা বৃত্তের সীমারেখায় অবস্থিত

এবং যে বিন্দুর দূরত্ব ব্যাসার্ধের বেশি, তা বৃত্তের অভ্যন্তরে বা সীমারেখায় অবস্থিত নয়।]

জ্যা ঃ বৃত্তের উপরে অবস্থিত যেকোনো দুটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশকে বলা হয় জ্যা। 90নং চিত্রে, AB বৃত্তের একটি জ্যা।

ব্যাস ঃ কেন্দ্রগামী জ্যাকে বলা হয় ব্যাস। 90 নং চিত্রে, CD একটি ব্যাস।



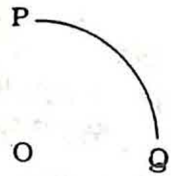
চিত্র নং ঃ 90

লক্ষ কর, ব্যাসের দৈর্ঘ্য ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ।

বৃত্তচাপ ঃ বৃত্ত যে বক্ররেখা দ্বারা গঠিত তার অংশকে বলা হয় বৃত্তচাপ।

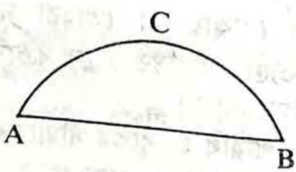
91 নং চিত্রে, PQ একটি বৃত্তচাপ।

[মন্তব্য ঃ যদি চাপটি সীমারেখার অর্ধেকের ছোট হয়, তাহলে তাকে উপচাপ এবং যদি অর্ধেকের চেয়ে বড় হয়, তাহলে তাকে অধিচাপ বলে।]

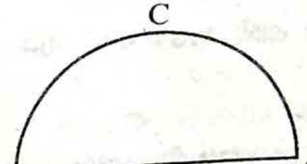


চিত্র নং ঃ 91

বৃত্তাংশ ঃ কোনো বৃত্তের একটি জ্যা ও একটি চাপ দ্বারা সীমাবদ্ধ চিত্রকে বলা হয় বৃত্তাংশ। 92 নং চিত্রে, ACB একটি বৃত্তাংশ। এটি AB জ্যা ও ACB বৃত্তচাপ দ্বারা গঠিত।



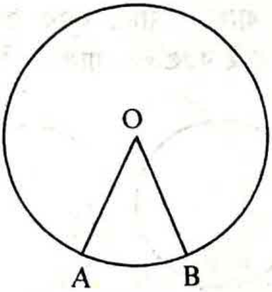
চিত্র নং ঃ 92



চিত্র নং ঃ 93

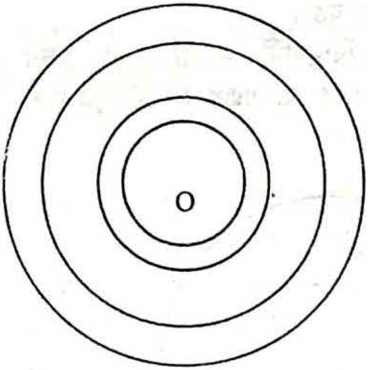
অর্ধবৃত্ত ঃ একটি ব্যাস ও বৃত্তের সীমারেখার অর্ধেক দ্বারা গঠিত বদ্ধ চিত্রকে বলা হয় অর্ধবৃত্ত। 93 নং চিত্রে, ACB একটি অর্ধবৃত্ত। এটি AB ব্যাস ও ACB চাপ দ্বারা গঠিত।

বৃত্তকলা ঃ কোনো বৃত্তের দুটি ব্যাসার্ধ ও একটি চাপ দ্বারা সীমাবদ্ধ চিত্রকে বলা হয় বৃত্তের কলা । 94 নং চিত্রে, AOB একটি বৃত্তকলা ।



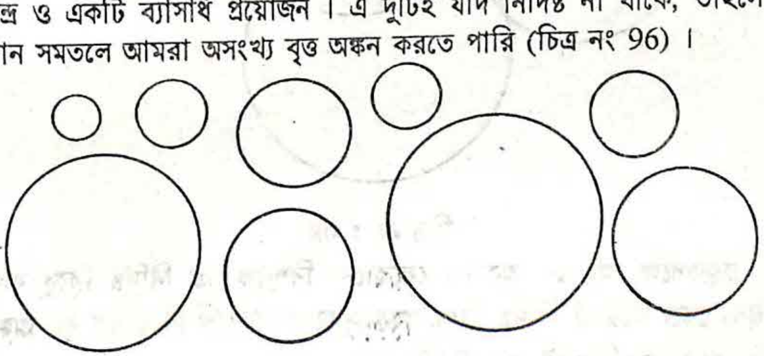
চিত্র নং ঃ 94

একককেন্দ্রীয় বৃত্ত ঃ একটি বিন্দুকে কেন্দ্র করে যদি অনেকগুলি বৃত্ত অঙ্কন করা যায়, তাহলে ঐ বৃত্তগুলিকে একককেন্দ্রীয় বৃত্ত বলা হয় । 95 নং চিত্রে, সকল বৃত্তগুলিই O বিন্দুকে কেন্দ্র করে অঙ্কিত হয়েছে । ওই বৃত্তগুলি হল একককেন্দ্রীয় বৃত্ত ।



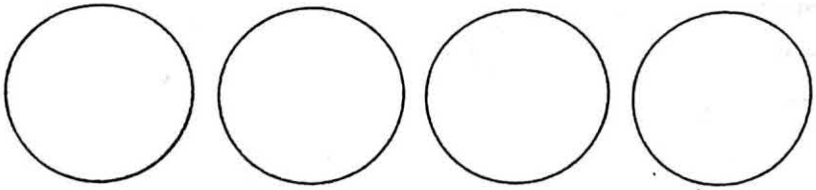
চিত্র নং ঃ 95

স্বভাবতই আমরা বুঝতে পারছি একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হলে, একটি কেন্দ্র ও একটি ব্যাসার্ধ প্রয়োজন । এ দুটিই যদি নির্দিষ্ট না থাকে, তাহলে কোন সমতলে আমরা অসংখ্য বৃত্ত অঙ্কন করতে পারি (চিত্র নং 96) ।


চিত্র নং ঃ 96

যদি কেন্দ্র নির্দিষ্ট থাকে তাহলেও আমরা অসংখ্য বৃত্ত অঙ্কন করতে পারব, তবে সেগুলি একককেন্দ্রীয় বৃত্ত হবে (চিত্র নং 95) ।

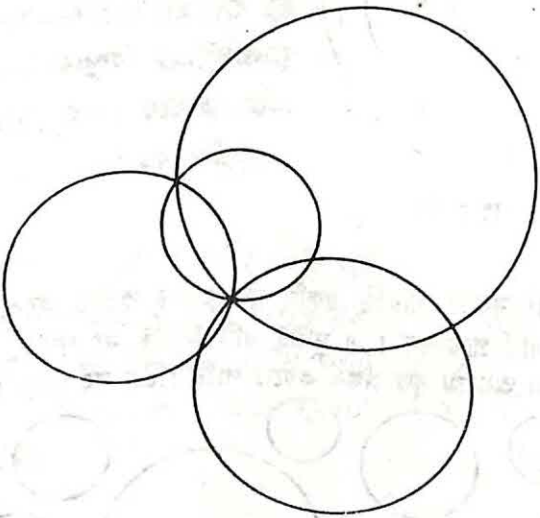
যদি ব্যাসার্ধ নির্দিষ্ট থাকে তাহলেও আমরা অসংখ্য বৃত্ত অঙ্কন করতে পারব। সেই বৃত্তগুলির ব্যাসার্ধগুলি দৈর্ঘ্যে সমান হবে (চিত্র নং 97)।



চিত্র নং ঃ 97

এই বৃত্তগুলিকে আমরা বলি সর্বসম বৃত্ত।

এবার দেখা যাক, একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী কতগুলি বৃত্ত অঙ্কন করা যায়? এক্ষেত্রেও আমরা দেখতে পাব যে, এরূপ অসংখ্য বৃত্ত অঙ্কন করা যাবে (চিত্র নং 98)।

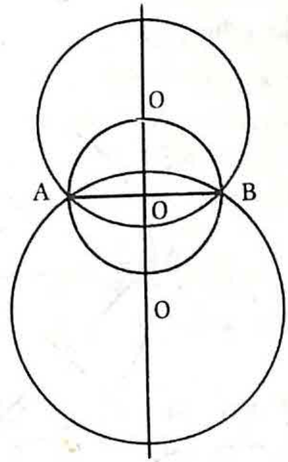


চিত্র নং ঃ 98

প্রকৃতপক্ষে, সমতলে অবস্থিত যেকোনো বিন্দুকে (ঐ নির্দিষ্ট বিন্দু বাদ দিয়ে) কেন্দ্র করে ঐ নির্দিষ্ট বিন্দু পর্যন্ত দূরত্বকে ব্যাসার্ধ নিয়ে যত বৃত্ত অঙ্কন করা হবে, সেগুলি সবই সেই নির্দিষ্ট বিন্দুগামী হবে।)

যদি দুটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী বৃত্ত অঙ্কন করতে হয়, তাহলে কতগুলি বৃত্ত পাব? এক্ষেত্রেও অসংখ্য বৃত্ত পাব।

ধরা যাক, A ও B দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু। তাহলে বৃত্তগুলির কেন্দ্র এমন স্থানে অবস্থিত হতে হবে যে, তা থেকে A ও B যেন সমদূরে অবস্থিত হয়। আমরা পূর্বেই দেখেছি AB রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত যেকোনো বিন্দু A ও B থেকে সমদূরবর্তী। সুতরাং AB-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত যেকোনো বিন্দুকে কেন্দ্র করে ওই বিন্দু ও A অথবা B বিন্দুর সংযোজক রেখাংশকে ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করলেই তা A ও B বিন্দুগামী হবে।



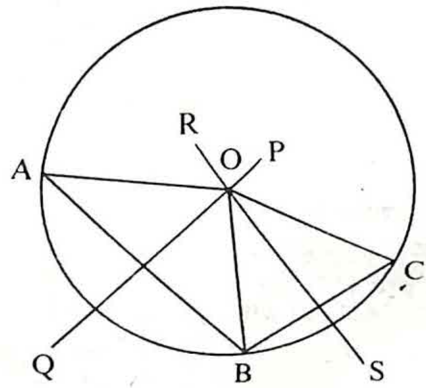
চিত্র নং ঃ 99

এর পর দেখা যাক তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী কতগুলি বৃত্ত অঙ্কন করা যাবে। প্রথমে দেখি বিন্দুগুলি যদি অসমরেখ হয় তাহলে কি হবে ?

আমরা দেখব যে তিনটি অসমরেখ বিন্দু দিয়ে একটি ও মাত্র একটিই বৃত্ত অঙ্কন করা যাবে। পরবর্তী উপাপাদ্যে এই ধর্মটিই প্রতিষ্ঠিত হবে।

উপপাদ্য 34

তিনটি সমরেখ বিন্দু দিয়ে মাত্র একটি বৃত্তই অঙ্কন করা যাবে।



চিত্র নং : 100

ধরা যাক, A, B, C তিনটি সমরেখ বিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে যে, ঐ তিনটি বিন্দু দিয়ে মাত্র একটি বৃত্তই অঙ্কন করা যাবে।

অঙ্কন : A, B ও B, C যুক্ত করা হল। AB ও BC-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন করা হল। তারা হল যথাক্রমে PQ ও RS. PQ ও RS পরস্পরকে ছেদ করবে, যেহেতু A, B, C অসমরেখ। মনে করি, এরা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। O বিন্দুর সঙ্গে A, B ও C-কে যুক্ত করা হল।

প্রমাণ : $\because$ O বিন্দু AB-এর সমদ্বিখণ্ডক PQ-এর উপর অবস্থিত,

$\therefore$ O বিন্দু A ও B থেকে সমদূরবর্তী ;

অর্থাৎ, $OA = OB$.

অনুরূপভাবে, $OB = OC$.

$\therefore \quad OA = OB = OC.$

$\therefore$ O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OA ব্যাসার্ধ নিয়ে যে বৃত্ত অঙ্কন করা যাবে, তা B ও C বিন্দু দিয়েও যাবে।

সুতরাং A, B, C বিন্দু দিয়ে যাবে এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করা যায়, যার কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ OA বা OB বা OC.

এবার দেখা যাক, A, B, C দিয়ে একটি মাত্র বৃত্তই অঙ্কন করা যাবে কিনা ?

A, B, C বিন্দু তিনটি নির্দিষ্ট বলে AB ও BC রেখাংশ দুটিও নির্দিষ্ট। সেজন্য তাদের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক PQ এবং RS-ও নির্দিষ্ট এবং দুটি সরল-রেখা যেহেতু একটি মাত্র বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে, সেজন্য O বিন্দুটিও নির্দিষ্ট। আবার A বিন্দু নির্দিষ্ট বলে OA রেখাংশটিও নির্দিষ্ট। সুতরাং A, B, C বিন্দু দিয়ে যে বৃত্ত যাবে তার কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্দিষ্ট।

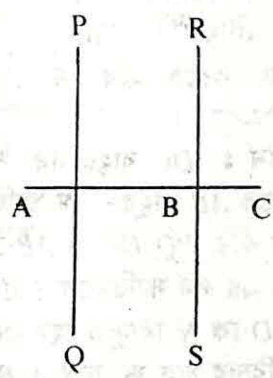
সুতরাং A, B, C বিন্দু দিয়ে মাত্র একটি বৃত্তই অঙ্কন করা যাবে।

অনুসিদ্ধান্ত **: 1.** দুটি বৃত্ত দুয়ের অধিক বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করতে পারে না।

যেহেতু তিনটি বিন্দু দিয়ে মাত্র একটিই বৃত্ত অঙ্কন করা যায়, সুতরাং, দুটি বৃত্তের তিনটি সাধারণ বিন্দু থাকলে বৃত্ত দুটি সমাপতিত হতো।

2. AB, BC ও CA-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু হবে।

[মন্তব্য : (1) A, B, C যদি সমরেখ হত, তাহলে AB ও BC রেখাংশ দুটি একই সরলরেখায় অবস্থিত হতো। সেক্ষেত্রে PQ ও RS লম্ব সমদ্বিখণ্ডক দুটি পরস্পর সমান্তরাল হতো, অর্থাৎ তারা কোনো বিন্দুতেই পরস্পরকে ছেদ করত না ; অর্থাৎ এমন কোনো বিন্দুই পাওয়া যেত না, যা A, B, C থেকে সমদূরবর্তী। সুতরাং সমরেখ তিনটি বিন্দু দিয়েই যাবে এরূপ কোনো বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব নয়।]



চিত্র নং : 101

(2) যেহেতু তিনটি অসমরেখ বিন্দু A, B, C দ্বারা ABC ত্রিভুজটি গঠিত হয়, সুতরাং ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি দিয়ে যাবে এরূপ বৃত্ত অঙ্কন সব সময়েই সম্ভব।

(3) তিন-এর অধিক বিন্দু দিয়ে যাবে এরূপ বৃত্ত অঙ্কন সব সময়েই সম্ভব নয়। কোনো কোনো শর্তে তা অঙ্কন সম্ভব হবে। পরবর্তীকালে আমরা সেরূপ শর্ত নিয়ে চারটি বিন্দু অর্থাৎ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রেই আলোচনা করব। যাই হোক, যখন সেরূপ বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব হবে, তখন ঐ বিন্দুগুলিকে শীর্ষবিন্দু

করে যে ঋজুরেখ চিত্র অঙ্কন করা যাবে, বৃত্তটিকে সেই ঋজুরেখ চিত্রের পরিবৃত্ত বলা হবে।

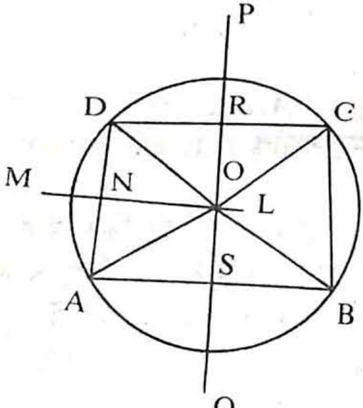
(4) যদি চারটি বিন্দু দিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করা সম্ভব হয়, তাহলে ওই বিন্দুগুলিকে সমবৃত্তস্থ বলা হয় এবং যদি কোনো চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু দিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করা সম্ভব হয়, তাহলে ওই চতুর্ভুজটিকে বলা হবে বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। চার-এর অধিক বিন্দু বা অন্য কোনো বহুভুজের ক্ষেত্রেও একই কথা প্রযোজ্য।]

2.3 একটি বিশেষ ধর্ম :

একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়মের শীর্ষবিন্দুগুলি সমবৃত্তস্থ।

$ABCD$ একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম, যার AB ও DC বাহু পরস্পর সমান্তরাল এবং তির্যক বাহুদ্বয় সমান ; অর্থাৎ $DA = CB$.

প্রমাণ করতে হবে যে, A, B, C, D সমবৃত্তস্থ।



চিত্র নং : 102

অঙ্কন : DC বাহুর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক PQ অঙ্কন করা হল। ওই লম্ব সমদ্বিখণ্ডক AB বাহুরও লম্ব সমদ্বিখণ্ডক হবে।

মনে করি, PQ, DC ও AB-কে যথাক্রমে R ও S বিন্দুতে ছেদ করে।

AD-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক LM অঙ্কন করা হল, যা PQ-কে O বিন্দুতে এবং AD-কে N বিন্দুতে ছেদ করে।

O বিন্দুর সঙ্গে যথাক্রমে A, B, C, D বিন্দুগুলিকে যুক্ত করা হল।

প্রমাণ : $\because$ O, DC-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত,

$\therefore$ $OC = OD$.

অনুরূপভাবে, $OD = OA$

এবং $OA = OB$.

$\therefore$ $OC = OD = OA = OB$.

$\therefore$ O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OC ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করা হবে, তা D, A, B বিন্দু দিয়েও যাবে।

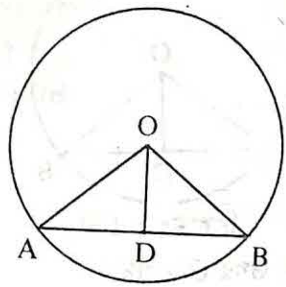
অর্থাৎ A, B, C, D সমবৃত্তস্থ।

[মন্তব্য : এই ধর্মটি আমরা পরবর্তীকালে একটি উপপাদ্য প্রমাণ করার জন্য ব্যবহার করব।]

2.4 কেন্দ্র ও জ্যা সম্পর্কিত উপপাদ্য ঃ

উপপাদ্য 35

ব্যাস নয় এরূপ কোনো জ্যা-কে যদি বৃত্তের কেন্দ্রগামী কোনো সরলরেখা সমদ্বিখণ্ডিত করে, তাহলে ঐ সরলরেখা জ্যা-এর উপর লম্ব হবে।



চিত্র নং ঃ 103

ধরা যাক, OD সরলরেখাটি AB জ্যা-কে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, OD, AB-এর উপর লম্ব।

অঙ্কন ঃ O, A ও O, B যুক্ত করা হল।

প্রমাণ ঃ ΔOAD ও ΔOBD-এর

$OA = OB$ (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ),

OD সাধারণ বাহু,

এবং $AD = BD$ (কল্পনানুসারে)।

$\therefore \quad \Delta OAD \cong OBD$

$\therefore \quad \angle ODA = \angle ODB$ (অনুরূপ কোণ)।

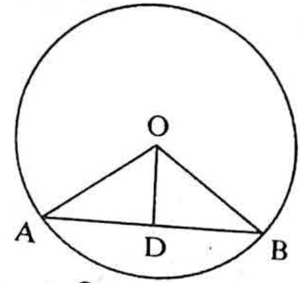
$\therefore \quad DO, AB$-এর উপর দণ্ডায়মান হয়ে সমান কোণ উৎপন্ন করেছে।

$\therefore \quad OD, AB$-এর উপর লম্ব।

[মন্তব্য ঃ ΔOAB একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। $\therefore \angle OAB = \angle OBA$. এবার তাহলে বাহু-কোণ-বাহু সর্বসমতার ধর্ম থেকেও উপপাদ্যটি প্রমাণ করা যেত। চেষ্টা করে দেখতো।]

উপপাদ্য 36

ব্যাস নয় এরূপ কোনো জ্যা-এর উপর বৃত্তের কেন্দ্র থেকে লম্ব অঙ্কন করা হলে, ঐ লম্ব জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করবে।



চিত্র নং ঃ 104

ধরা যাক, AB জ্যা-এর উপর OD লম্ব ।

প্রমাণ করতে হবে যে, OD, AB কে সমদ্বিখণ্ডিত করে ;

অর্থাৎ $AD = DB$.

অঙ্কন ঃ O, A ও O, B যুক্ত করা হল ।

প্রমাণ ঃ $\because OD \perp AB$,

$\therefore \Delta ODA$ ও ΔODB সমকোণী ত্রিভুজ।

সমকোণী ΔODA ও ΔODB-এর

অতিভুজ OA = অতিভুজ OB (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ),

OD সাধারণ বাহু।

$\therefore ODA \cong \Delta ODB$

$\therefore AD \cong DB$ (অনুরূপ বাহু) ।

[মন্তব্য ঃ এক্ষেত্রেও ΔOAB সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ বলে $\angle OAB = \angle OBA$. এবার, 'কোণ-কোণ-বাহু"–সর্বসমতার ধর্ম ব্যবহার করে উপপাদ্যটি প্রমাণ করা যায় । চেষ্টা করে দেখতো ।]

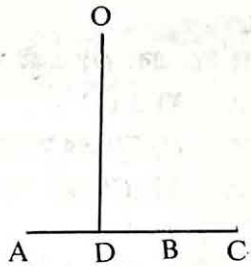
অনুসিদ্ধান্ত **1.** ঃ বৃত্তের কোনো জ্যা-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক বৃত্তের কেন্দ্রগামী হবে ।

[মন্তব্য ঃ কোনো বৃত্তের দুটি অসমান্তরাল জ্যা বা বৃত্তের উপরিস্থিত তিনটি বিন্দু দেওয়া থাকলে আমরা বৃত্তের কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে পারি । মনে রেখ, পরবর্তীকালে ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কনের সময় এই ধর্মটিকেই ব্যবহার করা হবে ।]

অনুসিদ্ধান্ত 2. ঃ একটি সরলরেখা একটি বৃত্তকে দুয়ের অধিক বিন্দুতে ছেদ করতে পারে না ।

যদি সম্ভব হয় তাহলে মনে করি, O কেন্দ্রীয় বৃত্তকে সরলরেখাটি A, B ও C বিন্দুতে ছেদ করে ।

O বিন্দু থেকে সরলরেখার উপর লম্ব অঙ্কন করা হল ।



চিত্র নং ঃ 105

$\therefore AD = DB$

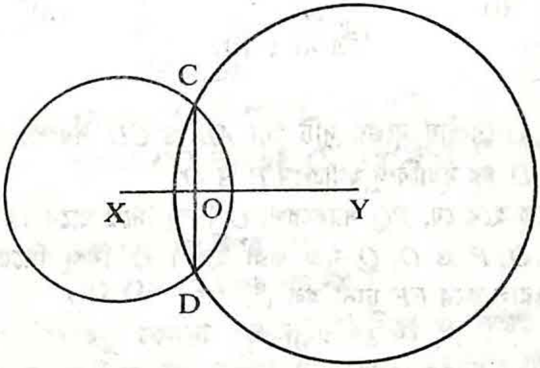
এবং $AD = DC$,

অর্থাৎ $DB = DC$,

যা অসম্ভব ; যদি না B ও C বিন্দু সমাপতিত হয় ।

কয়েকটি প্রয়োগ ঃ

1. X, Y কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত পরস্পরকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে । প্রমাণ কর যে, XY সাধারণ জ্যা CD-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক ।



চিত্র নং ঃ 106

অঙ্কন ঃ X বিন্দু থেকে CD-এর উপর XO লম্ব অঙ্কন করা হল । O, Y যুক্ত করা হল ।

প্রমাণ ঃ X-কেন্দ্রীয় বৃত্তের CD জ্যা এবং $XO \perp CD$,

$\therefore$ O, CD-এর মধ্যবিন্দু ।

আবার, Y-কেন্দ্রীয় বৃত্তের CD জ্যা এবং O, CD-এর মধ্যবিন্দু,

$\therefore \quad YO \perp CD.$

কোন সরলরেখার উপর অবস্থিত একটি বিন্দুতে একটি মাত্র লম্ব অঙ্কন করা যায়,

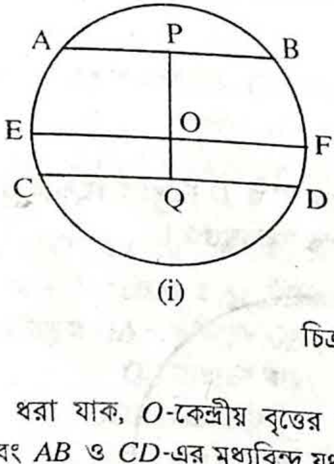
সুতরাং XO এবং OY একই সরলরেখায় অবস্থিত।

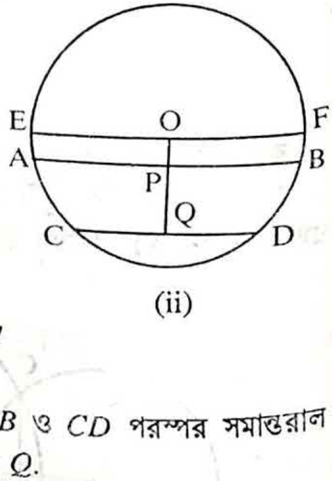
$\therefore \quad XY \perp CD$

আবার, O, CD-এর মধ্যবিন্দু,

$\therefore \quad XY$, CD-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক।

2. একটি বৃত্তের দুটি জ্যা পরস্পর সমান্তরাল। প্রমাণ কর যে, তাদের মধ্যবিন্দু দুটির সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্রগামী হবে।





চিত্র নং ঃ 107

ধরা যাক, O-কেন্দ্রীয় বৃত্তের দুটি জ্যা AB ও CD পরস্পর সমান্তরাল এবং AB ও CD-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q.

প্রমাণ করতে হবে যে, PQ সরলরেখা O বিন্দু দিয়ে যাবে।

অঙ্কন ঃ O, P ও O, Q যুক্ত করা হল। O বিন্দু দিয়ে AB ও CD-এর সমান্তরাল করে EF টানা হল।

প্রমাণ ঃ $\because \quad P$, AB-এর মধ্যবিন্দু,

$\therefore \quad OP \perp AB.$

$\because \quad AB \parallel EF,$

$\therefore \quad OP \perp EF.$

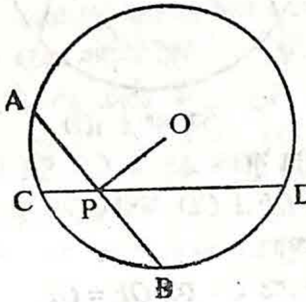
অনুরূপভাবে, $\quad OQ \perp EF.$

$\therefore \quad OP$ এবং OQ উভয়েই EF-এর উপর লম্ব।

কিন্তু যেহেতু একটি সরলরেখার উপর অবস্থিত একটি বিন্দুতে একটি মাত্র লম্ব অঙ্কন করা যায়, সুতরাং P, O, Q সমরেখ।

$\therefore$ PQ সরলরেখা O বিন্দু দিয়ে যাবে।

3. কোনো বৃত্তের দুটি পরস্পরছেদী জ্যা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করতে পারে না, যদি না উভয়েই বৃত্তের ব্যাস হয়–প্রমাণ কর।



চিত্র নং ঃ 108

ধরা যাক, O-কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের AB ও CD দুটি জ্যা পরস্পরকে P বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করেছে যে, P বিন্দু AB-এর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে যে, P, CD-এর মধ্যবিন্দু হবে না।

অঙ্কন ঃ O, P যুক্ত করা হল।

প্রমাণ ঃ $\because$ P, AB-এর মধ্যবিন্দু,

$\therefore$ $OP \perp AB$.

$\because$ AB ও CD উভয়েই P বিন্দুগামী,

$\therefore$ AB ও CD উভয়েই OP-এর উপর P বিন্দুতে লম্ব হতে পারে না।

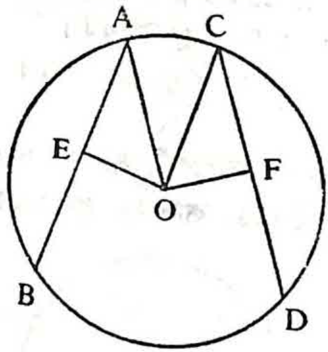
$\because$ AB, OP-এর উপর লম্ব,

$\therefore$ CD, OP-এর উপর লম্ব নয়।

আবার, যেহেতু কোনো জ্যা-এর মধ্যবিন্দু ও বৃত্তের কেন্দ্র-সংযোজক রেখাংশ জ্যা-এর উপর লম্ব, সুতরাং P, CD-এর মধ্যবিন্দু নয়।

[উভয়েই ব্যাস হলে, অবশ্যই সংজ্ঞানুসারে পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে।]

4. প্রমাণ কর যে, কোনো বৃত্তের দুটি সমান জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী।



চিত্র নং ঃ 109

ধরা যাক, O-কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ও CD দুটি জ্যা সমান। আরও ধরা যাক, $OE \perp AB$ এবং $OF \perp CD$, অর্থাৎ OE ও OF যথাক্রমে কেন্দ্র O থেকে AB ও CD-এর দূরত্ব।

প্রমাণ করতে হবে যে, $OE = OF$.

অঙ্কন ঃ O, A ও O, C যুক্ত করা হল।

প্রমাণ ঃ $\because$ $OE \perp AB$ এবং $OF \perp CD$,

$\therefore$ ΔOEA এবং ΔOFC উভয়েই সমকোণী ত্রিভুজ।

একই কারণে E ও F যথাক্রমে AB ও CD-এর মধ্যবিন্দু।

অর্থাৎ, $AE = \frac{1}{2}AB$ এবং $CF = \frac{1}{2}CD$.

$\because$ $AB = CD$.

$\therefore$ $AE = CF$.

এবার সমকোণী ΔOEA এবং সমকোণী ΔOFC-এর

অতিভুজ $OA =$ অতিভুজ OC (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

এবং $AE = CF$ (প্রমাণিত),

$\therefore$ $\Delta OEA \cong \Delta OFC$.

$\therefore$ $OE = OF$ (অনুরূপ বাহু)।

অনুশীলনী 16

1. O-কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 5 সেমি এবং AB একটি জ্যা-এর দৈর্ঘ্য 8 সেমি। O বিন্দু থেকে AB জ্যা-এর দূরত্ব কত ? যুক্তি দাও।

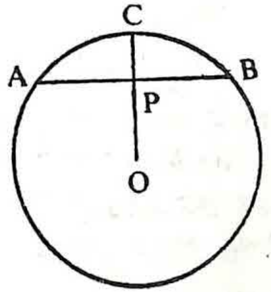
2. O-কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 26 সেমি। O বিন্দু থেকে PQ জ্যা-এর দূরত্ব 5 সেমি। PQ জ্যা-এর দৈর্ঘ্য কত ? যুক্তি দাও।

3. O-কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের PQ জ্যা-এর দৈর্ঘ্য 4 সেমি এবং O বিন্দু থেকে PQ-এর দূরত্ব 2·1 সেমি। বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য কত ? যুক্তি দাও।

4. 10 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের দুটি সমান্তরাল জ্যা-এর দৈর্ঘ্য 16 সেমি ও 12 সেমি। ওই দুটি জ্যা-এর মধ্যে দূরত্ব কত, যদি তারা কেন্দ্রের *(i)* একই পার্শ্বে থাকে *(ii)* বিপরীত পার্শ্বে থাকে ? যুক্তি দাও।

5. একটি বৃত্তের একটি জ্যা-এর দৈর্ঘ্য 48 সেমি এবং কেন্দ্র থেকে ওই জ্যা-এর দূরত্ব 7 সেমি। ওই বৃত্তের কেন্দ্র থেকে যে জ্যা-এর দূরত্ব 20 সেমি, সেই জ্যা-এর দৈর্ঘ্য কত ? যুক্তি দাও।

6. 110 নং চিত্রে O বিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র। $OP \perp AB$. $AB = 6$ সেমি, $PC = 2$ সেমি ; বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত ? যুক্তি দাও।



চিত্র নং : 110

7. একটি সরলরেখা দুটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের একটিকে A ও B বিন্দুতে এবং অপরটিকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AC = DB$.

8. P ও Q-কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত পরস্পরকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, PQ, $\angle APB$ ও $\angle AQB$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

9. দুটি সমান বৃত্তের কেন্দ্র H, K এবং তারা পরস্পরকে R, S বিন্দুতে ছেদ করে। R বিন্দু দিয়ে HK-এর সমান্তরাল অঙ্কন করা হল যা বৃত্ত দুটিকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $CD = 2HK$.

10. X ও Y-কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত পরস্পরকে A, B বিন্দুতে ছেদ করে। XY-এর মধ্যবিন্দু S-এর সঙ্গে A বিন্দু যুক্ত করা হল। A বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত SA-এর উপর লম্ব বৃত্ত দুটিকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $PA = AQ$.

11. প্রমাণ কর যে, কোনো বৃত্তের দুটি জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী হলে, তারা সমান হবে।

12. কোনো বৃত্তের দুটি পরস্পরচ্ছেদী জ্যা-এর ছেদবিন্দুগামী ব্যাসের সঙ্গে জ্যা দুটি সমান কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ কর যে, জ্যা দুটি সমান।

13. PQ, QR, RS, ST একটি বৃত্তের জ্যা । $PQ = QR = RS = ST$ হলে, প্রমাণ কর যে, $PR = QS = RT$.

14. একটি বৃত্তের AB ও AC জ্যা দুটি সমান । প্রমাণ কর যে, $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক কেন্দ্রগামী হবে ।

15. কোনো বৃত্তের PQ একটি নির্দিষ্ট জ্যা এবং AB যেকোনো একটি ব্যাস । প্রমাণ কর যে, AB-এর যেকোনো অবস্থানের জন্যই A ও B থেকে PQ-এর লম্বদৈর্ঘ্যের সমষ্টি (বা অন্তর) অপরিবর্তিত থাকবে ।

16. কোনো বৃত্তের দুটি সমান জ্যা পরস্পরকে ছেদ করে । প্রমাণ কর যে, একটির খণ্ডিতাংশ দুটি যথাক্রমে অপরটির খণ্ডিতাংশ দুটির সমান হবে ।

17. একটি বৃত্তের দুটি পরস্পরচ্ছেদী জ্যা-এর অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডক যদি কেন্দ্রগামী হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, জ্যা দুটি সমান ।

18. দুটি পরস্পরচ্ছেদী বৃত্তের কোনো ছেদবিন্দুগামী একটি সরলরেখা একটি বৃত্তকে P ও অপর বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করে । সরলরেখাটি কেন্দ্র দুটির সংযোজক রেখাংশের সমান্তরাল হলে, প্রমাণ কর যে, PQ বৃহত্তম হবে ।

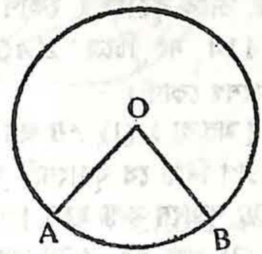
বৃত্ত ও কোণ সম্পর্কিত উপপাদ্য :

উপপাদ্যগুলি নিয়ে আলোচনার পূর্বে কয়েকটি সংজ্ঞা জানা প্রয়োজন।

সংজ্ঞা : 1. কেন্দ্রস্থ কোণ : একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত দুটি বিন্দুর সঙ্গে কেন্দ্র যুক্ত করলে যে কোণ উৎপন্ন হয়, তাকে কেন্দ্রস্থ কোণ বলা হয়। কোণটি যে বৃত্তচাপের সম্মুখীন, তাকে সেই বৃত্তচাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণ বলা হয়।

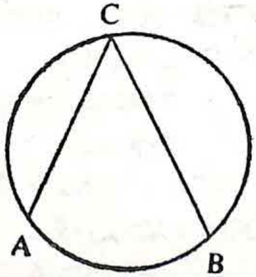
111 নং চিত্রে, $\angle AOB$ বা প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle AOB$ কেন্দ্রস্থ কোণ। $\angle AOB$ হল উপচাপ AB-এর উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণ এবং প্রবৃদ্ধ $\angle AOB$ হল অধিচাপ AB-এর উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণ।

[মন্তব্য : দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু চার সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোণকে প্রবৃদ্ধ কোণ বলা হয়।]

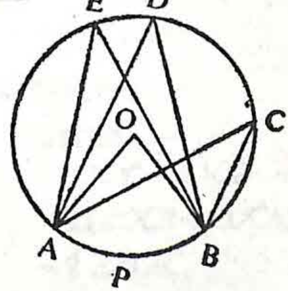


চিত্র নং : 111

2. পরিধিস্থ কোণ : কোনো একটি বৃত্তচাপের প্রান্তবিন্দুগুলির সঙ্গে বিপরীত বৃত্তচাপের উপর অবস্থিত যেকোনো বিন্দু যুক্ত করলে যে কোণ উৎপন্ন হয়, তাকে পরিধিস্থ কোণ বলা হয়। ওই কোণটি যে বৃত্তচাপের সম্মুখীন, তাকে সেই বৃত্তচাপের উপর অবস্থিত পরিধিস্থ কোণ বলা হয়। 112 নং চিত্রে, $\angle ACB$ পরিধিস্থ কোণ এবং ওই কোণটি উপচাপ AB-এর উপর অবস্থিত।



চিত্র নং : 112



চিত্র নং : 113

[মন্তব্য : (1) একই চাপের উপর কেন্দ্রস্থ কোণ একটি মাত্র হলেও পরিধিস্থ কোণ অনেকগুলি হতে পারে। যেমন 113 নং চিত্রে, APB চাপের

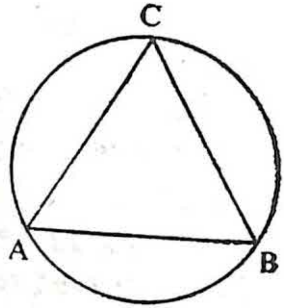
উপর অবস্থিত একটি মাত্র কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle AOB$, কিন্তু ওই চাপের উপর অবস্থিত পরিধিস্থ কোণ $\angle ACB$, $\angle ADB$, $\angle AEB$ প্রভৃতি।

(2) এখানে যেহেতু উপচাপ বা অধিচাপ উল্লেখ করা হল না, সেজন্য বিবেচ্য চাপের উপর একটি বিন্দু নিয়ে চাপের উল্লেখ করা হল।]

3. বৃত্তাংশস্থ কোণ ঃ একটি বৃত্তাংশের জ্যা ওই বৃত্তাংশের বৃত্তচাপের উপর অবস্থিত কোনো বিন্দুতে যে কোণ উৎপন্ন করে, তাকে বৃত্তাংশস্থ কোণ বলা হয়।

114 নং চিত্রে, $\angle ACB$, ACB বৃত্তাংশস্থ কোণ।

[মন্তব্য ঃ (1) AB জ্যা এবং ACB বৃত্তচাপ নিয়ে যে বৃত্তাংশটি গঠিত, তাকে ACB বৃত্তাংশ বলা হচ্ছে।

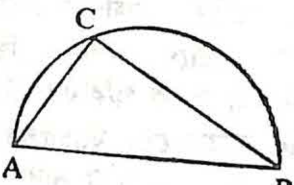


চিত্র নং ঃ 114

(2) লক্ষ কর, ACB বৃত্তাংশস্থ কোণটিকে উপচাপ AB-এর উপর অবস্থিত পরিধিস্থ কোণও বলা যায়।]

4. অর্ধবৃত্তস্থ কোণ ঃ একটি অর্ধবৃত্তের ব্যাস অর্ধবৃত্তচাপে যে কোণ উৎপন্ন করে, তাকে অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলা হয়।

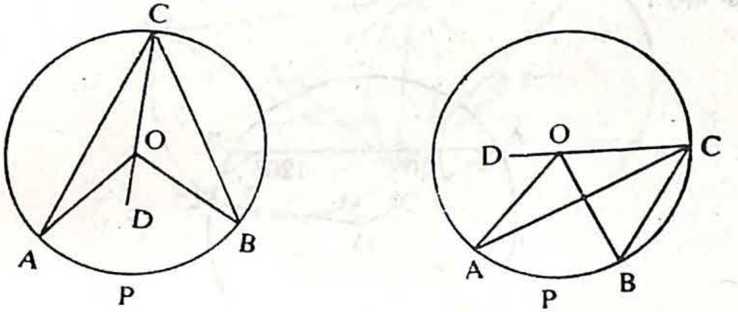
115 নং চিত্রে, $\angle ACB$ হল অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।



চিত্র নং ঃ 115

উপপাদ্য .37

কোনো বৃত্তের একই বৃত্তচাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ।



(i) (ii)

চিত্র নং ঃ 116

ধরা যাক, চাপ APB-এর উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle AOB$ এবং পরিধিস্থ কোণ $\angle ACB$.

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOB = 2\angle ACB$.

অঙ্কন ঃ C, O যুক্ত করে D বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হল।

প্রমাণ ঃ ΔAOC-এর

$OA = OC$ (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ),

$\therefore \quad \angle OCA = \angle OAC.$

আবার, ΔAOC-এর CO বাহুকে D বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হয়েছে,

$\therefore$ বহিঃস্থ কোণ $\angle AOD = \angle OAC + \angle OCA$

$= 2\angle OCA.$

অনুরূপভাবে, ΔBOC থেকে পাওয়া যাবে

$\angle BOD = 2\angle OCB.$

$\therefore$ (i) নং চিত্র থেকে পাওয়া যাবে

$\angle AOB = \angle AOD + \angle BOD$

$= 2(\angle OCA + \angle OCB)$

$= 2\angle ACB$

(ii) নং চিত্র থেকে পাওয়া যাবে

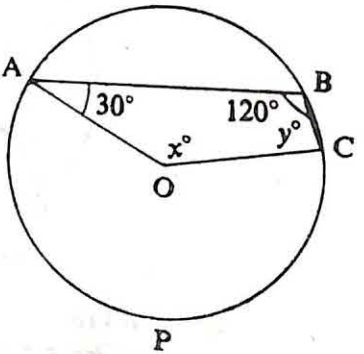
$\angle AOB = \angle BOD - \angle AOD$

$= 2(\angle OCB - \angle OCA)$

$= 2\angle ACB.$

কয়েকটি প্রয়োগ ঃ

1. 117 নং চিত্রে, O বৃত্তের কেন্দ্র। $\angle OAB = 30^\circ$, $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle BCO = y^\circ$ এবং $\angle COA = x^\circ$; x ও y-এর মান নির্ণয় কর। যুক্তি দাও।



চিত্র নং ঃ 117

উত্তর ঃ $x = 120,\ y = 90$

প্রমাণ ঃ $\because$ APC চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণ প্রবৃদ্ধ $\angle AOC$ এবং পরিধিস্থ কোণ $\angle ABC$,

$\therefore$ প্রবৃদ্ধ $\angle AOC = 2\angle ABC$

$= 2 \times 120^\circ$

$= 240^\circ.$

$\therefore$ $\angle COA = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ.$

$\therefore$ $x = 120.$

আবার, $\angle OAB + \angle ABC + \angle BCO + \angle COA = 360^\circ.$

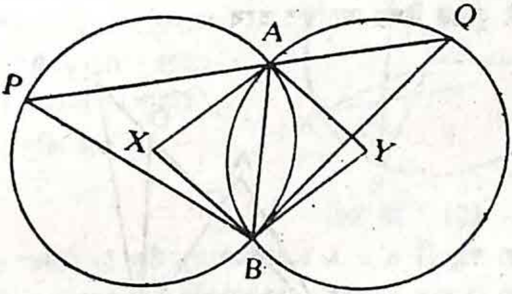
$\therefore$ $30^\circ + 120^\circ + y^\circ + 120^\circ = 360^\circ,$

বা, $y^\circ + 270^\circ = 360^\circ.$

বা, $y^\circ = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ.$

$\therefore$ $y = 90.$

2. দুটি সমান বৃত্ত পরস্পরকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দুগামী একটি সরলরেখা একটি বৃত্তকে P বিন্দুতে এবং অপর বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $BP = BQ$.



চিত্র নং : 118

অঙ্কন : মনে করি, X, Y যথাক্রমে প্রথম বৃত্ত ও দ্বিতীয় বৃত্তের কেন্দ্র। A, B ; A, X ; B, X ; A, Y ; B, Y যুক্ত করা হল।

প্রমাণ : ΔAXB ও ΔAYB-এর

$AX = AY$ (সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ),

$BX = BY$ (সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ),

AB সাধারণ।

$\Delta AXB \equiv \Delta AYB$.

$\therefore \quad \angle AXB = \angle AYB$ (অনুরূপ কোণ)।

কিন্তু $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AXB$ ($\because$ একই চাপের উপর অবস্থিত $\angle APB$ পরিধিস্থ কোণ এবং $\angle AXB$ কেন্দ্রস্থ কোণ)।

অনুরূপে, $\angle AQB = \frac{1}{2}\angle AYB$,

$\therefore \quad \angle APB = \angle AQB$ ($\because \angle AXB = \angle AYB$),

অর্থাৎ, $\angle QPB = \angle PQB$.

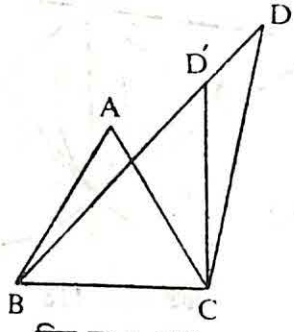
ΔPBQ-এর

$\angle QPB = \angle PQB$

$\therefore \quad BP = BQ$.

3. ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, যার $AB = AC$. BC-এর যে পার্শ্বে ΔABC অবস্থিত, সেই পার্শ্বেই ΔDBC অবস্থিত এবং $\angle BAC = 2\angle BDC$.

প্রমাণ কর যে, A-কে কেন্দ্র করে AB ব্যাসার্ধ নিয়ে যে বৃত্ত অঙ্কন করা যাবে, D বিন্দু সেই বৃত্তের উপর অবস্থিত হবে।



চিত্র নং ঃ 119

মনে করি, D বিন্দু সেই বৃত্তের উপর অবস্থিত নয়। তাহলে ধরা যাক, বৃত্তটি BD-কে D' বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore\ \angle BAC = 2\angle BD'C$ ($\because\ \angle BAC$ ও $\angle BD'C$ যথাক্রমে একই চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ ও পরিধিস্থ কোণ)।

কিন্তু $\angle BAC = 2\angle BDC$ (কল্পনানুসারে),

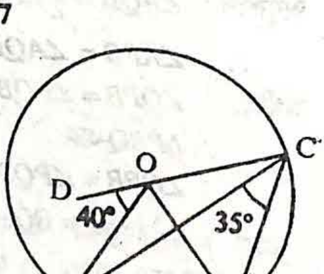
$\therefore\ \angle BD'C = \angle BDC.$

কিন্তু ইহা অসম্ভব, যদি না D ও D' বিন্দু সমাপতিত হয়, কারণ $\Delta DD'C$-এর বহিঃস্থ $\angle BD'C >$ অন্তঃস্থ বিপরীত $\angle BDC$.

$\therefore$ D বিন্দু সেই বৃত্তের উপর অবস্থিত হবে।

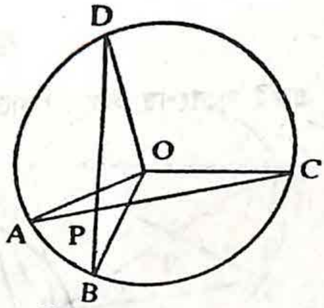
অনুশীলনী 17

1. 120 নং চিত্রে, O বৃত্তের কেন্দ্র, $\angle AOD = 40$ $\angle ACB = 35^\circ$. $\angle BCO$ ও $\angle BOD$-এর মান নির্ণয় কর। যুক্তি দাও।



চিত্র নং ঃ 120

2. 121 নং চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র। $\angle APB = 80°$ হলে, $\angle AOB$ ও $\angle COD$-এর মানের সমষ্টি নির্ণয় কর। যুক্তি দাও।



চিত্র নং : 121

3. C ও D-কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত পরস্পরকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দুগামী একটি সরলরেখা C-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে P বিন্দুতে এবং D-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে,

(i) $\angle PBQ = \angle CAD$ (ii) $\angle BPC = \angle BQD$.

4. O-কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের OA ব্যাসার্ধ ; AQ একটি জ্যা এবং C বৃত্তের উপরে অবস্থিত একটি বিন্দু। O, A, C বিন্দুগামী বৃত্তটি AQ-কে P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $CP = PQ$.

5. দুটি সমান বৃত্ত একটি অপরটির কেন্দ্রগামী। বৃত্ত দুটি পরস্পরকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দুগামী একটি সরলরেখা বৃত্ত দুটিকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমান কর যে, ΔBCD সমবাহু।

6. ΔABC-এর পরিবৃত্তের কেন্দ্র S ; AD, BC-এর উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে, $\angle BAD = \angle SAC$.

7. O-কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের দুটি জ্যা AB ও CD পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $\angle AOD + \angle BOC = 2\angle BPC$.

যদি $\angle AOD$ ও $\angle BOC$ পরস্পর সম্পূরক হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, জ্যা দুটি পরস্পর লম্ব।

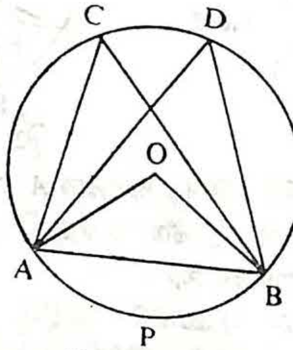
8. O-কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের AB ও CD দুটি জ্যা-কে বর্ধিত করলে তারা পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে,

$\angle AOC - \angle BOD = 2\angle BPC$.

9. কোনো বৃত্তের PR একটি ব্যাস এবং PQ একটি জ্যা। প্রমাণ কর যে, PQ-এর সমান্তরাল ব্যাসার্ধ OR বৃত্তচাপকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

উপপাদ্য 38

একই বৃত্তাংশস্থ সকল কোণের মান সমান।



চিত্র নং ঃ 122

ধরা যাক, যেকোনো দুটি কোণ $\angle ACB$ ও $\angle ADB$, $ACDB$ বৃত্তাংশে অবস্থিত।

প্রমাণ করতে হবে যে, $ACDB$ বৃত্তাংশস্থ সকল কোণই সমান। যেহেতু $\angle ACB$ ও $\angle ADB$ ওই বৃত্তাংশস্থ যেকোনো দুটি কোণ, সুতরাং $\angle ACB$ ও $\angle ADB$ পরস্পর সমান প্রমাণিত হলেই উপপাদ্যটি প্রমাণিত হবে।

অঙ্কন ঃ মনে করি, বৃত্তের কেন্দ্র O.

O, A ও O, B যুক্ত করা হল।

প্রমাণ ঃ চাপ APB-এর উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle AOB$ এবং পরিধিস্থ কোণ $\angle ACB$ ও $\angle ADB$;

$\therefore \quad \angle AOB = 2\angle ACB$

এবং $\quad \angle AOB = 2\angle ADB.$

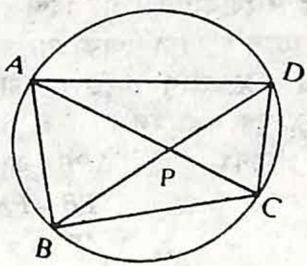
$\therefore \quad 2\angle ACB = 2\angle ADB$

$\therefore \quad \angle ACB = \angle ADB.$

[মন্তব্য ঃ এই উপপাদ্যটির সাধারণ নির্বাচন আমরা নিম্নলিখিত ভাবে দিতে পারতাম ঃ কোনো বৃত্তের একই বৃত্তচাপের উপর অবস্থিত সকল পরিধিস্থ কোণ সমান।]

কয়েকটি প্রয়োগ :

1. 123 নং চিত্রে, $\angle BDC = 50°, \angle APB = 65°$ $\angle CBD = 28°$; $\angle ADB, \angle ABD$ $\angle BAC, \angle ACB, \angle CAD$ এবং $\angle ACD$-এর মান নির্ণয় কর।



চিত্র নং : 123

$$\angle BAC = \angle BDC \text{ (একই বৃত্তাংশস্থ কোণ)}$$
$$= 50°.$$
$$\angle CAD = \angle CBD \text{ (একই বৃত্তাংশস্থ কোণ)}$$
$$= 28°.$$

ΔBPC-এর

বহিঃস্থ $\angle APB = \angle PBC + \angle PCB$
$= \angle CBD + \angle ACB.$
$\therefore \quad 65° = 28° + \angle ACB.$
$\therefore \quad \angle ACB = 65° - 28° = 37°.$

$\angle ADB = \angle ACB$ (একই বৃত্তাংশস্থ কোণ)
$= 37°.$

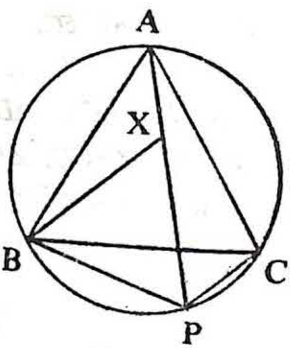
আবার, ΔAPB-এর
$\angle BAP + \angle ABP + \angle APB = 180°.$
অর্থাৎ, $\angle BAC + \angle ABD + \angle APB = 180°,$
বা, $50° + \angle ABD + 65° = 180°,$
বা, $\angle ABD + 115° = 180°,$
$\therefore \quad \angle ABD = 180° - 115° = 65°.$

$\angle ACD = \angle ABD$ (একই বৃত্তাংশস্থ কোণ)
$= 65°$

$\therefore \quad \angle ADB = 37°, \angle ABD = 65° \ \angle BAC = 50°, \angle ACB = 37°,$
$\angle CAD = 28°, \angle ACD = 65°.$

2. ABC সমবাহু ত্রিভুজটি একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত। BC উপচাপের উপর P যেকোনো একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $PA = PB + PC$.

অঙ্কন : PA থেকে PB-এর সমান করে PX অংশ কেটে নেওয়া হল। B, X যুক্ত করা হল।



চিত্র নং : 124

প্রমাণ : $\because$ ΔPBX-এর $PB = PX$,

$\therefore$ $\angle PXB = \angle PBX$.

আবার, $\angle BPX = \angle ACB$ (একই বৃত্তাংশস্থ কোণ)

$= 60^\circ$ ($\because$ ΔABC সমবাহু);

$\therefore$ $\angle PXB + \angle PBX = 120^\circ$.

$\therefore$ $\angle PXB = \angle PBX = 60^\circ$.

$\therefore$ ΔPBX সমবাহু।

$\therefore$ $\angle PBX = \angle CBA$ (প্রত্যেকেই 60°)।

$\therefore$ $\angle PBC = \angle PBX - \angle CBX$

$= \angle CBA - \angle CBX = \angle XBA$.

এবার, ΔAXB ও ΔCPB-এর

$AB = BC$ ($\because$ ΔABC সমবাহু),

$BX = BP$ ($\because$ ΔPBX সমবাহু),

অন্তর্ভূত $\angle XBA =$ অন্তর্ভূত $\angle PBC$ (প্রমাণিত),

$\therefore$ $\Delta AXB \cong \Delta CPB$.

$\therefore$ $AX = PC$ (অনুরূপ বাহু)।

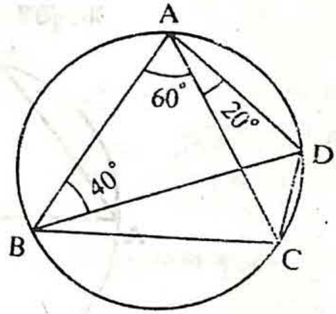
$\therefore$ $PA = PX + XA = PB + PC$

[মন্তব্য : যেহেতু $PA = PB + PC$ প্রমাণ করতে হবে, সেজন্য PB-র সমান করে PX কেটে নেওয়া হয়েছে, যাতে $XA = PC$ দেখাতে পারলেই প্রমাণটি হবে।]

অনুশীলনী 18

1. 125 নং চিত্রে, $\angle DBA = 40^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$ এবং $\angle CAD = 20^\circ$; $\angle DCA$ ও $\angle BCA$-এর মান নির্ণয় কর।

$\angle BAD$ ও $\angle DCB$-এর মানের সমষ্টি কত হল দেখতো।



চিত্র নং ঃ 125

2. ABC ত্রিভুজের O লম্ববিন্দু এবং BC-এর উপর অঙ্কিত লম্ব AD-কে বর্ধিত করলে ΔABC-এর পরিবৃত্তকে G বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $OD = DG$.

3. ΔABC-এর অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র I. বর্ধিত AI ত্রিভুজের পরিবৃত্তকে P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $PB = PC = PI$.

4. $ABCD$ এমন একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ যে AC, $\angle BAD$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে। AD-কে E বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যে, $DE = AB$ হয়। প্রমাণ কর যে, $CE = CA$.

5. দুটি বৃত্ত পরস্পরকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। P বিন্দু দিয়ে দুটি সরলরেখা টানা হল, যারা একটি বৃত্তকে A, B বিন্দুতে এবং অপর বৃত্তকে যথাক্রমে C, D বিন্দুতে ছেদ করল। প্রমাণ কর যে, $\angle AQC = \angle BQD$.

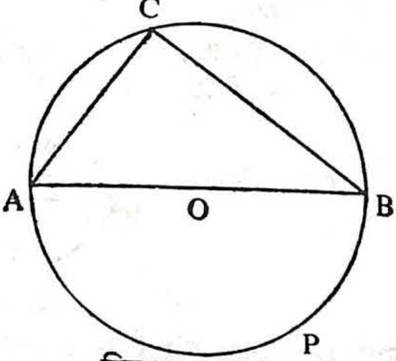
6. দুটি বৃত্তের একটি অপরটির কেন্দ্র O বিন্দুগামী। বৃত্ত দুটি পরস্পরকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দুগামী একটি সরলরেখা O বিন্দুগামী বৃত্তকে P বিন্দুতে এবং O-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে R বিন্দুতে ছেদ করে। P, B ও R, B যুক্ত করে প্রমাণ কর যে, $PR = PB$.

7. একটি বৃত্তের AB ও CD দুটি জ্যা পরস্পর লম্ব। এদের ছেদবিন্দু O থেকে AD-এর উপর অঙ্কিত লম্বকে বর্ধিত করলে BC-কে E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে E, BC-এর মধ্যবিন্দু।

8. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের একটি কোণ 120°; প্রমাণ কর যে ওই ত্রিভুজের সমান বাহুগুলি পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান।

9. $ABCD$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের $AB = DC$; প্রমাণ কর যে, $AC = BD$.

উপপাদ্য 39
অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ



চিত্র নং : 126

ধরা যাক, O-কেন্দ্রীয় বৃত্তে $\angle ACB$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ACB = 1$ সমকোণ।

প্রমাণ : একই বৃত্তচাপ APB-এর উপর অবস্থিত $\angle AOB$ কেন্দ্রস্থ কোণ এবং $\angle ACB$ পরিধিস্থ কোণ,

$\therefore \quad \angle AOB = 2\angle ACB,$

কিন্তু AOB একটি রেখাংশ $\quad \therefore \quad \angle AOB = 2$ সমকোণ,

অর্থাৎ $2\angle ACB = 2$ সমকোণ। $\quad \therefore \quad \angle ACB = 1$ সমকোণ।

বিকল্প প্রমাণ :

ধরা যাক, ACB একটি অর্ধবৃত্ত যে বৃত্তের কেন্দ্র O এবং $\angle ACB$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ACB = 1$ সমকোণ।

অঙ্কন : C, O যুক্ত করা হল।

প্রমাণ : ΔAOC-এর

$OA = OC$ (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ),

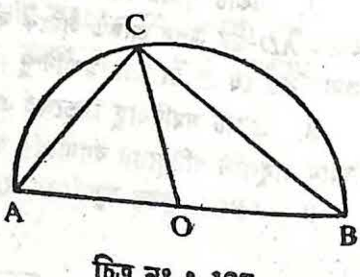
$\therefore \quad \angle OCA = \angle OAC.$

আবার, ΔBOC-এর

$OB = OC,$

$\therefore \quad \angle OCB = \angle OBC.$

$\therefore \quad \angle OCA + \angle OCB = \angle OAC + \angle OBC;$



চিত্র নং : 127

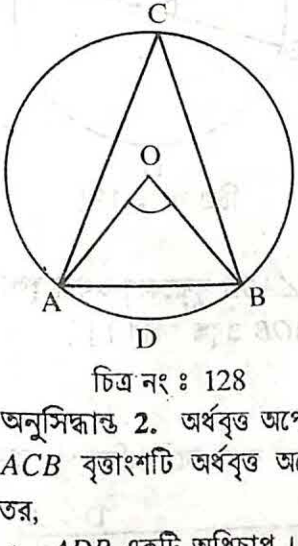
অর্থাৎ, $\angle ACB = \angle BAC + \angle ABC$

$\therefore\ 2\angle ACB = \angle ACB + \angle BAC + \angle ABC = 180^\circ.$

$\therefore\ \angle ACB = 90^\circ = 1$ সমকোণ।

[মন্তব্য ঃ বিকল্প প্রমাণে বৃত্তের অপর চাপটির কোন ব্যবহার করা হয় নি, তাই কেবল অর্ধবৃত্তটিই অঙ্কন করা হয়েছে। কিন্তু পূর্বের প্রমাণে নিচের চাপটিকে ব্যবহার করতে হয়েছে। তাই সম্পূর্ণ বৃত্তটিই অঙ্কন করতে হবে।]

অনুসিদ্ধান্ত 1. অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ সূক্ষ্মকোণ।



চিত্র নং ঃ 128

ACB বৃত্তাংশ অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর,

$\therefore\ ADB$ একটি উপচাপ।

$\therefore$ ওই চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle AOB$, 2 সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

$\because\ \angle ACB$ ওই একই চাপের উপর অবস্থিত পরিধিস্থ কোণ,

$\therefore\ \angle ACB$, 1 সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অর্থাৎ $\angle ACB$ সূক্ষ্মকোণ।

অনুসিদ্ধান্ত 2. অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশস্থ কোণ স্থূলকোণ।

ACB বৃত্তাংশটি অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর,

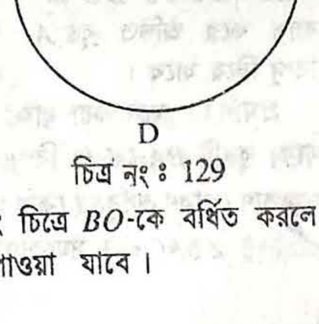
$\therefore\ ADB$ একটি অধিচাপ।

$\therefore$ ওই চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ $\angle AOB$, 2 সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

$\because\ \angle ACB$ ওই একই চাপের উপর অবস্থিত পরিধিস্থ কোণ,

$\therefore\ \angle ACB$, 1 সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

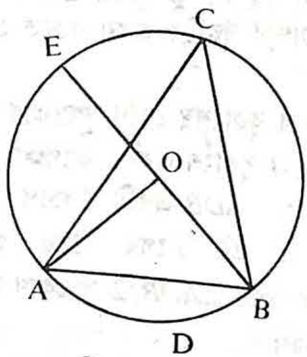
$\therefore\ \angle ACB$ স্থূলকোণ।



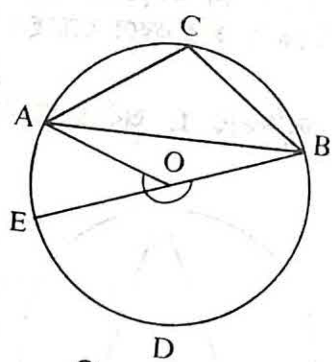
চিত্র নং ঃ 129

[মন্তব্য ঃ 128 নং চিত্রে ও 129 নং চিত্রে BO-কে বর্ধিত করলে যথাক্রমে 130 নং চিত্র ও 131 নং চিত্র পাওয়া যাবে।

ধরা যাক, BO, বৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে 130 নং চিত্রে দেখা যাচ্ছে $\angle AOB < \angle BOE$ এবং 131 নং চিত্রে দেখা যাচ্ছে বিবেচ্য কোণ $\angle AOB > \angle BOE$.



চিত্র নং ঃ 130



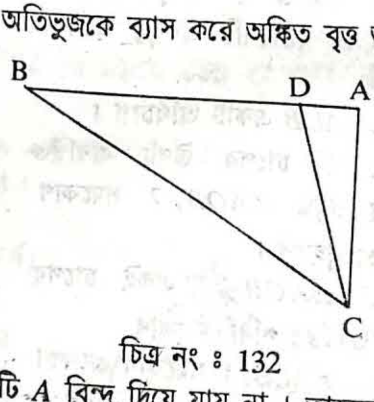
চিত্র নং ঃ 131

$\because$ $\angle BOE = 2$ সমকোণ,

$\therefore$ 130 নং চিত্রে ও 128 নং চিত্রে, $\angle AOB$ সূক্ষ্মকোণ অথবা স্থূলকোণ এবং 131 নং চিত্রে ও 129 নং চিত্রে, $\angle AOB$ প্রবৃদ্ধ কোণ।]

কয়েকটি প্রয়োগ ঃ

1. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজকে ব্যাস করে অঙ্কিত বৃত্ত অবশ্যই সমকৌণিক বিন্দু দিয়ে যাবে —প্রমাণ কর।



চিত্র নং ঃ 132

ধরা যাক, ΔABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার $\angle A$ সমকোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, BC-কে ব্যাস করে অঙ্কিত বৃত্ত A বিন্দু দিয়ে যাবে।

প্রমাণ ঃ মনে করা যাক, বৃত্তটি A বিন্দু দিয়ে যায় না। তাহলে ধরা যাক, বৃত্তটি BA-কে D বিন্দুতে ছেদ করে। সেই অনুসারে $\angle BDC = 1$ সমকোণ (কারণ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ)।

কিন্তু $\angle BAC = 1$ সমকোণ (কল্পনানুসারে),

∴ $\angle BAC = \angle BDC$.

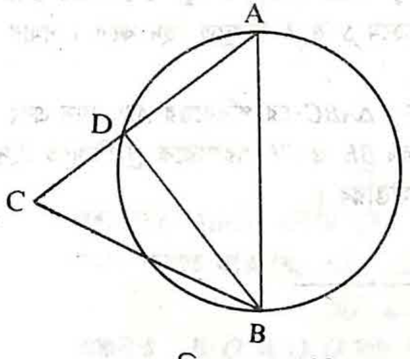
কিন্তু তা অসম্ভব, যদি না D ও A বিন্দু সমাপতিত হয় ;

কারণ, ΔADC-এর বহিঃস্থ $\angle BDC >$ অন্তঃস্থ বিপরীত $\angle BAC$.

∴ বৃত্তটি A বিন্দু দিয়ে যাবে ।

[মন্তব্য ঃ (1) তোমরা পূর্বেই প্রমাণ করেছ যে, সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু থেকে অঙ্কিত মধ্যমা অতিভুজের অর্ধেক । এর সাহায্যেও এটি প্রমাণ করা যায় । চেষ্টা করে দেখতো ।]

(2) 41 নং উপপাদ্যটির সাহায্যেও এটি প্রমাণ করা যায়। ওই উপপাদ্যটির প্রমাণ শেখার পর চেষ্টা করে দেখবে ।]



চিত্র নং ঃ 133

2. প্রমাণ কর যে, একটি ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর দুটি বাহুকে ব্যাস করে অঙ্কিত বৃত্ত দুটির ছেদবিন্দু তৃতীয় বাহুর উপর অবস্থিত হবে ।

ধরা যাক, ABC একটি ত্রিভুজ, যার AB ও BC বাহু দুটি বৃহত্তম বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর । AB-কে ব্যাস করে অঙ্কিত বৃত্ত, মনে করা যাক, AC-কে D বিন্দুতে ছেদ করে ।

প্রমাণ করতে হবে যে, BC-কে ব্যাস করে অঙ্কিত বৃত্ত-ও D বিন্দু দিয়ে যাবে ।

অঙ্কন ঃ D, B যুক্ত করা হল ।

প্রমাণ ঃ ∵ $\angle ADB$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ,

∴ $\angle ADB = 1$ সমকোণ ।

∴ $\angle CDB = 1$ সমকোণ ।

∴ ΔCDB সমকোণী ত্রিভুজ ।

∴ BC-কে ব্যাস করে অঙ্কিত বৃত্ত অবশ্যই D বিন্দু দিয়ে যাবে ।

[মন্তব্য ঃ (1) সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ হলে, যেকোন দুটি বাহুর জন্যই ধর্মটি সিদ্ধ হবে ।

(2) স্পষ্টতঃই বোঝা যাচ্ছে যে, তৃতীয় বাহুর বিপরীত শীর্ষবিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুই হবে বৃত্ত দুটির ছেদবিন্দু ।]

অনুশীলনী 19

1. প্রমাণ কর যে, একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহু দুটির যেকোনোটিকে ব্যাস করে অঙ্কিত বৃত্ত অসমান বাহুটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে।

2. দুটি বৃত্ত পরস্পরকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। PA ও PB যথাক্রমে বৃত্ত দুটির ব্যাস। প্রমাণ কর যে, A, Q, B সমরেখ।

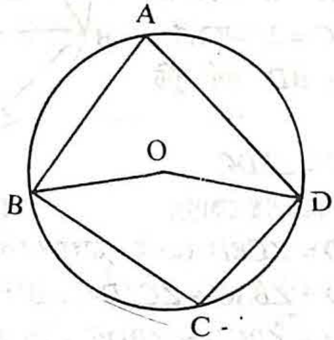
3. PQ রেখাংশের R মধ্যবিন্দু। PR ও PQ-কে ব্যাস করে দুটি বৃত্ত অঙ্কন করা হল। P বিন্দুগামী অপর একটি সরলরেখা প্রথম বৃত্তটিকে S বিন্দুতে এবং দ্বিতীয় বৃত্তটিকে T বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $PS = ST$.

4. একটি বৃত্তের উপর P, Q, R বিন্দু তিনটি অবস্থিত। PQ ও PR-এর উপর P বিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব দুটি বৃত্তকে যথাক্রমে S ও T বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $RQ = ST$.

5. ΔABC একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ। ΔABC-এর পরিবৃত্তের AP ব্যাস এবং AC ও AB-এর উপর যথাক্রমে অঙ্কিত লম্ব BE ও CF পরস্পরকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $BPCQ$ একটি সামান্তরিক।

উপপাদ্য 40

বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সম্পূরক।



চিত্র নং ঃ 134

ধরা যাক, $ABCD$ একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

প্রমাণ করতে হবে যে, (i) $\angle BAD + \angle BCD = 2$ সমকোণ।

(ii) $\angle ABC + \angle ADC = 2$ সমকোণ।

অঙ্কন ঃ B, O ও D, O যুক্ত করা হল।

প্রমাণ ঃ BAC বৃত্তচাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle BOD$ এবং পরিধিস্থ কোণ $\angle BAD$,

$$\therefore \quad \angle BOD = 2\angle BAD.$$

অর্থাৎ $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD.$

আবার, BAD, বৃত্তচাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণ প্রবৃদ্ধ $\angle BOD$ এবং পরিধিস্থ কোণ $\angle BCD$.

$\therefore \quad \angle BCD = \frac{1}{2}$ প্রবৃদ্ধ $\angle BOD.$

$\therefore \quad \angle BAD + \angle BCD = \frac{1}{2}(\angle BOD +$ প্রবৃদ্ধ $\angle BOD)$

$= \frac{1}{2} \times 4$ সমকোণ

অনুরূপভাবে, O, A এবং O, C যুক্ত করে প্রমাণ করা যাবে যে,

$\angle ABC + \angle ADC = 2$ সমকোণ।

বিকল্প প্রমাণ ঃ

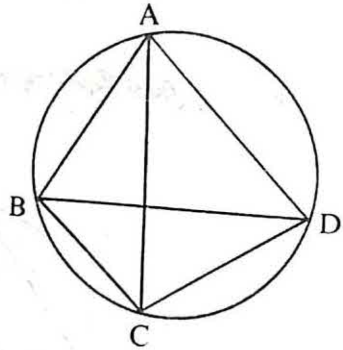
ধরা যাক, $ABCD$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

প্রমাণ করতে হবে যে,

(i) $\angle BAD + \angle BCD = 2$ সমকোণ,

(ii) $\angle ABC + \angle ADC = 2$ সমকোণ।

অঙ্কন ঃ AC ও BD কর্ণ দুটি টানা হল।



চিত্র নং ঃ 135

প্রমাণ ঃ $\angle BAC = \angle BDC$ (একই বৃত্তাংশস্থ কোণ),

$\angle CAD = \angle CBD$ (একই বৃত্তাংশস্থ কোণ)।

$\therefore \quad \angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = \angle BDC + \angle CBD$

$\therefore \quad \angle BAD + \angle BCD = \angle BDC + \angle CBD + \angle BCD = 2$ সমকোণ।

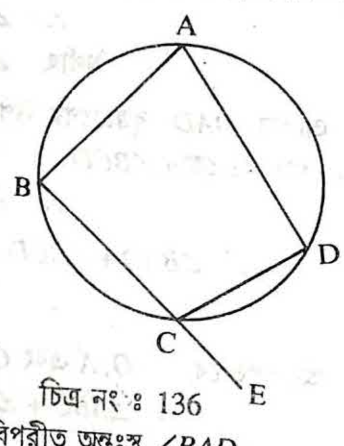
অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে,

$\angle ABC + \angle ADC = \angle DAC + \angle DCA + \angle ADC = 2$ সমকোণ।

[মন্তব্য ঃ (1) বিকল্প প্রমাণটি ইউক্লিডের প্রমাণ।

(2) দুটি বিপরীত কোণের সমষ্টি 2 সমকোণ প্রমাণ করার পর চতুর্ভুজের চারটি কোণের সমষ্টি চার সমকোণের সমান—এই ধর্ম থেকে অপর দুটি বিপরীত কোণের সমষ্টি 2 সমকোণ সহজেই প্রমাণ করা যায়।]

অনুসিদ্ধান্ত ঃ একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কোন বাহুকে বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণটি উৎপন্ন হয়, তা অন্তঃস্থ বিপরীত কোণের সমান হবে। 136 নং চিত্রে, BC বাহুকে E বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করার ফলে $\angle DCE$ বহিঃস্থ কোণটি উৎপন্ন হয়েছে। তাহলে



চিত্র নং ঃ 136

$\angle DCE =$ বিপরীত অন্তঃস্থ $\angle BAD$.

$\because \quad ABCD$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ,

$\therefore \quad \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ.$

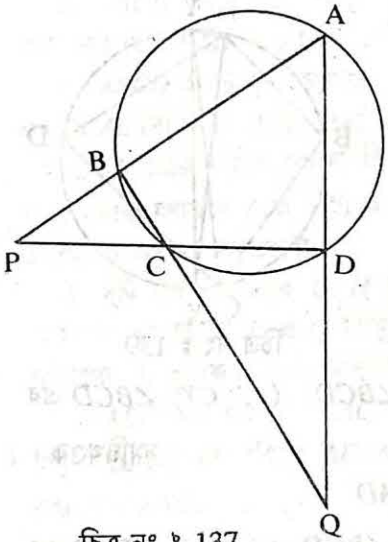
আবার, BE সরলরেখার উপর CD দণ্ডায়মান,

$\therefore \quad \angle BCD + \angle DCE = 180^\circ.$

$\therefore \quad \angle BCD + \angle DCE = \angle BAD + \angle BCD.$

$\therefore \quad \angle DCE = \angle BAD.$

কয়েকটি প্রয়োগ ঃ



চিত্র নং ঃ 137

1. $ABCD$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AB ও DC বাহুকে বর্ধিত করায় P বিন্দুতে এবং AD ও BC বাহুকে বর্ধিত করায় Q বিন্দুতে মিলিত হয়। $\angle ADC = 85^\circ$ ও $\angle BPC = 40^\circ$ হলে, $\angle BAD$ ও $\angle CQD$-এর মান নির্ণয় কর।

$ABCD$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বহিঃস্থ $\angle PBC = \angle ADC = 85^\circ.$

আবার ΔPBC-এর

$\angle PBC = 85^\circ, \angle BPC = 40^\circ.$

$\therefore \angle BCP = 180^\circ - (85^\circ + 40^\circ)$

$= 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ.$

$\therefore \quad \angle BAD =$ বহিঃস্থ $\angle BCP = 55^\circ.$

আবার, ΔCQD থেকে পাই

$\angle CQD = \angle ADC - \angle QCD$

$= \angle ADC - \angle BCP \quad [\because \angle QCD = \angle BCP]$

$= 85^\circ - 55^\circ = 30^\circ.$

$\therefore \quad \angle BAD = 55^\circ, \ \angle CQD = 30^\circ.$

2. প্রমাণ কর যে, বৃত্তস্থ সামান্তরিক অবশ্যই আয়তক্ষেত্র হবে।

ধরা যাক, $ABCD$ চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ সামান্তরিক।

প্রমাণ করতে হবে যে, $ABCD$ চতুর্ভুজটি আয়তক্ষেত্র।

প্রমাণ ঃ $\because ABCD$ একটি সামান্তরিক,

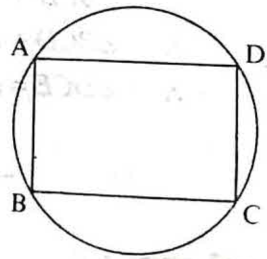
$\therefore \angle ABC = \angle ADC.$

আবার, $\because$ $ABCD$ সামান্তরিকটি বৃত্তস্থ,

$\therefore \angle ABC + \angle ADC = 180°.$

$\therefore \angle ABC = 90°.$

$\therefore$ $ABCD$ চতুর্ভুজটি আয়তক্ষেত্র।

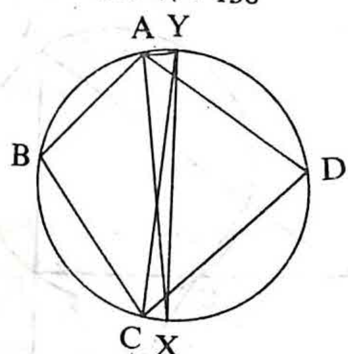


চিত্র নং ঃ 138

3. $ABCD$ একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। $\angle DAB$ ও $\angle BCD$-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় বৃত্তকে X এবং Y বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, XY ওই বৃত্তের ব্যাস।

অঙ্কন ঃ A, Y যুক্ত করা হল।

প্রমাণ ঃ $\angle YAD$ ও $\angle YCD$ একই চাপের উপর অবস্থিত,



চিত্র নং ঃ 139

$\therefore \angle YAD = \angle YCD = \frac{1}{2}\angle BCD.$ ($\because$ CY, $\angle BCD$-এর সমদ্বিখণ্ডক)।

$\therefore \angle XAY = \angle XAD + \angle YAD$

$= \frac{1}{2}\angle BAD + \frac{1}{2}\angle BCD$ ($\because$ AX, $\angle DAB$-এর সমদ্বিখণ্ডক)।

$= \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle BCD)$

$= \frac{1}{2} \times 180°$ ($\because$ $ABCD$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ)।

$= 90°.$

$\therefore$ $XCBAY$ অর্ধবৃত্ত। $\therefore$ XY বৃত্তের ব্যাস।

অনুশীলনী 20

1. $ABCD$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AB বাহুকে X বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হল। $\angle XBC = 82^\circ$ এবং $\angle ADB = 47^\circ$ হলে, $\angle BAC$-এর মান নির্ণয় কর।

2. $PQRS$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের PQ, SR বাহু দুটি বর্ধিত করায় T বিন্দুতে মিলিত হল। বৃত্তের কেন্দ্র O. $\angle POQ = 110^\circ$, $\angle QOR = 60^\circ$, $\angle ROS = 80^\circ$ হলে, $\angle RQS$ ও $\angle QTR$-এর মান নির্ণয় কর।

3. প্রমাণ কর যে, বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ম একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম।

4. দুটি বৃত্ত পরস্পরকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। P ও Q বিন্দুগামী দুটি সরলরেখা একটি বৃত্তকে যথাক্রমে A ও C এবং অপর বৃত্তকে যথাক্রমে B ও D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AC \parallel BD$.

5. $ABCD$ একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। BC বাহুকে E বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হল। প্রমাণ কর যে, $\angle BAD$ ও $\angle DCE$-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় বৃত্তের উপর মিলিত হবে।

6. $ABCD$ একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। DE জ্যা $\angle BDC$-এর বহির্দ্বিখণ্ডক। প্রমাণ কর যে, AE (বা বর্ধিত AE) $\angle BAC$-এর বহির্দ্বিখণ্ডক।

7. একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু X দিয়ে দুটি সরলরেখা অঙ্কন করা হল, যারা বৃত্তকে যথাক্রমে A, B বিন্দু ও C, D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, ΔXAC ও ΔXBD সদৃশকোণী।

8. দুটি বৃত্ত পরস্পরকে G, H বিন্দুতে ছেদ করে। G বিন্দুগামী একটি সরলরেখা বৃত্ত দুটিকে P ও Q বিন্দুতে এবং H বিন্দুগামী PQ-এর সমান্তরাল সরলরেখা বৃত্ত দুটিকে R ও S বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে $PQ = RS$.

9. ABC ত্রিভুজের $AB = AC$, E বর্ধিত BC-এর উপর যেকোনো একটি বিন্দু। ΔABC-এর পরিবৃত্ত AE-কে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $\angle ACD = \angle AEC$.

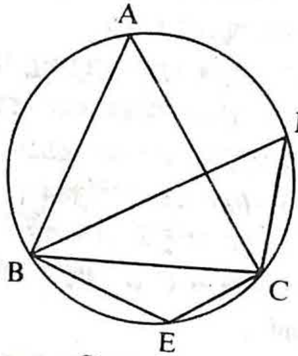
চারটি বিন্দু সমবৃত্তস্থ হওয়ার শর্ত ঃ

তোমরা পূর্বেই জেনেছ যে সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়মের শীর্ষবিন্দুগুলি একই বৃত্তের উপর অবস্থিত, অর্থাৎ সমবৃত্তস্থ।

এবার আমরা আরও দুটি শর্ত প্রমাণ করব।

উপপাদ্য 41

যদি দুটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তার একই পার্শ্বে অপর দুটি বিন্দুতে দুটি সমান কোণ উৎপন্ন করে, তাহলে চারটি বিন্দু সমবৃত্তস্থ হবে।



চিত্র নং ঃ 140

ধরা যাক, B ও C বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তার একই পার্শ্বে অবস্থিত A ও D বিন্দুতে যে দুটি কোণ উৎপন্ন করেছে তারা সমান, অর্থাৎ, $\angle BAC = \angle BDC$.

প্রমাণ করতে হবে যে, A, B, C, D সমবৃত্তস্থ।

অঙ্কন ঃ A, B, C বিন্দুগামী বৃত্তটি অঙ্কন করা হল। C বিন্দু দিয়ে DB-এর সমান্তরাল অঙ্কন করা হল, যা পূর্বোক্ত বৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করে। B, E যুক্ত করা হল।

প্রমাণ ঃ $\because$ $ABEC$ একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ,

$\therefore$ $\angle BAC + \angle BEC = 180°$.

কিন্তু $\angle BAC = \angle BDC$ (একই বৃত্তাংশস্থ কোণ)।

$\therefore$ $\angle BDC + \angle BEC = 180°$.

আবার, $CE \parallel DB$ এবং BE ভেদক।

$\therefore$ $\angle DBE + \angle BEC = 180°$.

$\because$ $\angle BDC + \angle BEC = \angle DBE + \angle BEC,$

$\therefore$ $\angle BDC = \angle DBE.$

$\therefore$ $BDCE$ একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম।

$\therefore$ B, D, C, E সমবৃত্তস্থ।

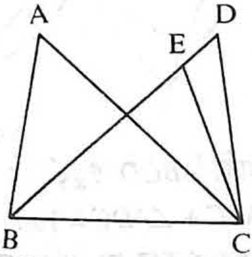
আবার, A, B, E, C সমবৃত্তস্থ (অঙ্কনানুসারে),

$\therefore$ A, B, C, D সমবৃত্তস্থ।

বিকল্প প্রমাণ ঃ

প্রমাণ করতে হবে যে, A, B, C, D সমবৃত্তস্থ।

অঙ্কন ঃ A, B, C বিন্দুগামী একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হল। যদি ওই বৃত্তটি D বিন্দুগামী না হয়, তাহলে বৃত্তটি BD-কে অথবা বর্ধিত BD-কে ছেদ করবে। মনে করি, এক্ষেত্রে বৃত্তটি BD-কে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। C, E যুক্ত করা হল।



চিত্র নং ঃ 141

প্রমাণ ঃ $\because$ $\angle ABC$ ও $\angle BEC$ একই বৃত্তাংশস্থ কোণ,

$\therefore$ $\angle BAC = \angle BEC.$

কিন্তু $\angle BAC = \angle BDC$ (কল্পনানুসারে),

$\therefore$ $\angle BEC = \angle BDC.$

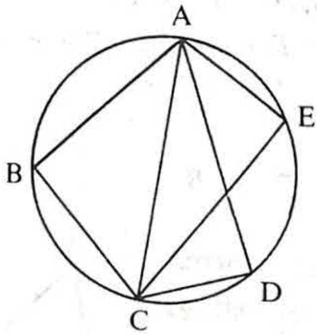
কিন্তু এ অসম্ভব, যদি না D ও E বিন্দু সমাপতিত হয় ; কারণ, ΔDBC-এর বহিঃস্থ কোণ $\angle BEC > \angle BDC.$

$\therefore$ D বিন্দু বৃত্তের উপর অবস্থিত।

$\therefore$ A, B, C, D সমবৃত্তস্থ।

উপপাদ্য 42

কোনো চতুর্ভুজের দুটি বিপরীত কোণ পরস্পর সম্পূরক হলে, চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি সমবৃত্তস্থ হবে।



চিত্র নং ঃ 142

ধরা যাক, $ABCD$ চতুর্ভুজের $\angle ABC$ ও $\angle ADC$ পরস্পর সম্পূরক ; অর্থাৎ $\angle ABC + \angle ADC = 180°$

প্রমাণ করতে হবে যে, A, B, C, D সমবৃত্তস্থ।

অঙ্কন ঃ A, B, C বিন্দুগামী একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হল। A, C যুক্ত করা হল মনে করি E ওই বৃত্তের উপর এমন একটি বিন্দু যা AC-এর যে পার্শ্বে D বিন্দু অবস্থিত সেই পার্শ্বেই অবস্থিত হয়। A, E ও C, E যুক্ত করা হল।

প্রমাণ ঃ $\because$ $ABCE$ একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ,

$\therefore$ $\angle ABC + \angle AEC = 180°$.

কিন্তু $\angle ABC + \angle ADC = 180°$ (কল্পনানুসারে),

$\therefore$ $\angle ABC + \angle AEC$

$= \angle ABC + \angle ADC$.

$\therefore$ $\angle AEC = \angle ADC$.

$\therefore$ $\angle AEC$ ও $\angle ADC$, AC এর একই পার্শ্বে অবস্থিত দুটি সমান কোণ,

$\therefore$ A, C, D, E সমবৃত্তস্থ।

কিন্তু $\because$ A, B, C, E সমবৃত্তস্থ,

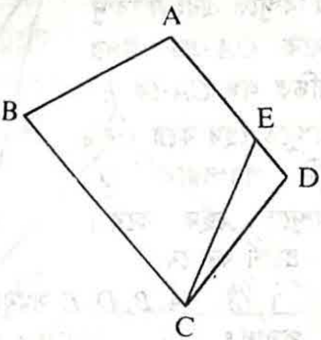
$\therefore$ A, B, C, D সমবৃত্তস্থ।

বিকল্প প্রমাণ ঃ

ধরা যাক, $ABCD$ চতুর্ভুজের $\angle ABC$ ও $\angle ADC$ পরস্পর সম্পূরক, অর্থাৎ $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$.

প্রমাণ করতে হবে যে, A, B, C, D সমবৃত্তস্থ।

অঙ্কন ঃ A, B, C বিন্দুগামী একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হল। যদি ওই বৃত্তটি D বিন্দুগামী না হয় তাহলে বৃত্তটি AD বা বর্ধিত AD-কে ছেদ করবে। মনে করি, এক্ষেত্রে AD-কে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। C, E যুক্ত করা হল।



চিত্র নং ঃ 143

প্রমাণ ঃ $\because$ $ABCE$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ

$\therefore \angle ABC + \angle AEC = 180^\circ$.

কিন্তু $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ (কল্পনানুসারে),

$\therefore \angle ABC + \angle AEC = \angle ABC + \angle ADC$.

$\therefore \angle AEC = \angle ADC$.

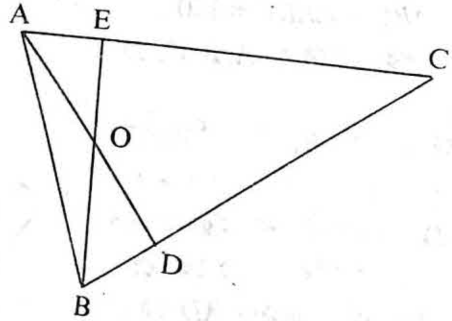
কিন্তু এ অসম্ভব, যদি না D ও E বিন্দু সমাপতিত হয় ; কারণ, ΔDEC-এর বহিঃস্থ কোণ $\angle AEC > \angle ADC$.

$\therefore$ D বিন্দু বৃত্তের উপর অবস্থিত,

$\therefore A, B, C, D$ সমবৃত্তস্থ।

কয়েকটি প্রয়োগ ঃ

1. ΔABC-এর A বিন্দু থেকে BC-এর উপর অঙ্কিত লম্ব BC-কে D বিন্দুতে এবং B বিন্দু থেকে CA-এর উপর অঙ্কিত লম্ব CA-কে E বিন্দুতে ছেদ করে। লম্ব দুটি পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে



চিত্র নং ঃ 144

(i) A, B, D, E সমবৃত্তস্থ, (ii) C, D, O, E সমবৃত্তস্থ।

প্রমাণঃ (i) $\angle AEB = 1$ সমকোণ ($\because BE \perp CA$),

$\angle ADB = 1$ সমকোণ ($\because AD \perp BC$),

$\therefore \angle AEB = \angle ADB$.

কিন্তু এরা AB রেখাংশের একই পার্শ্বে অবস্থিত দুটি কোণ,

$\therefore A, B, D, E$ সমবৃত্তস্থ।

(ii) $\angle OEC = 1$ সমকোণ ($\because BE \perp CA$),

$\angle ODC = 1$ সমকোণ ($\because AD \perp BC$),

$\therefore \angle OEC + \angle ODC = 2$ সমকোণ।

কিন্তু এরা $CDOE$ চতুর্ভুজের দুটি বিপরীত কোণ।

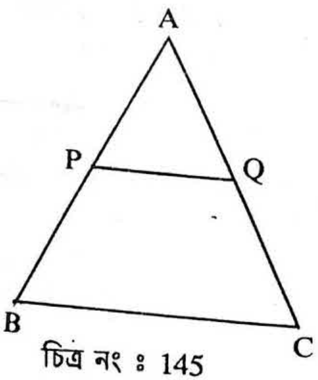
$\therefore C, D, O, E$ সমবৃত্তস্থ।

2. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে $AB = AC$. BC-এর সমান্তরাল সরলরেখা AB ও AC-কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $BPQC$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

প্রমাণঃ $\because ABC$ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে $AB = AC$,

$\therefore \angle ACB = \angle ABC$.

আবার, $\because PQ \parallel BC$,



চিত্র নং ঃ 145

$\therefore \angle ABC =$ অনুরূপ কোণ $\angle APQ$.

$\therefore \quad \angle APQ = \angle ACB.$

কিন্তু $\angle BPQ + \angle APQ = 2$ সমকোণ,

$\therefore \quad \angle BPQ + \angle ACB = 2$ সমকোণ,

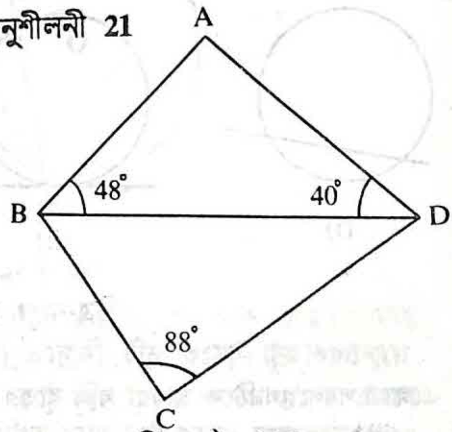
অর্থাৎ, $\angle BPQ + \angle QCB = 2$ সমকোণ।

কিন্তু এরা $BPQC$ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ,

$\therefore \quad BPQC$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

অনুশীলনী 21

1. 146 নং চিত্রে, $\angle BCD = 88°$, $\angle ABD = 48°$, $\angle ADB = 40°$. প্রমাণ কর যে, A, B, C, D সমবৃত্তস্থ।



চিত্র নং ঃ 146

2. ΔABC-এর $\angle B$ সমকোণ। AB-এর উপর অবস্থিত যেকোনো বিন্দু D থেকে AC-এর উপর লম্ব DE; প্রমাণ কর যে, B, D, E, C সমবৃত্তস্থ।

3. AB-কে ব্যাস করে একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করা হল। AP ও BQ দুটি জ্যা পরস্পরকে R বিন্দুতে ছেদ করে। R থেকে AB এর উপর অঙ্কিত লম্ব AB কে S বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, *(i)* B, S, R, P সমবৃত্তস্থ এবং *(ii)* A, S, R, Q সমবৃত্তস্থ।

4. O-কেন্দ্রীয় বৃত্তের AP, AQ দুটি জ্যা-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে R ও S. প্রমাণ কর যে, O, R, A, S সমবৃত্তস্থ।

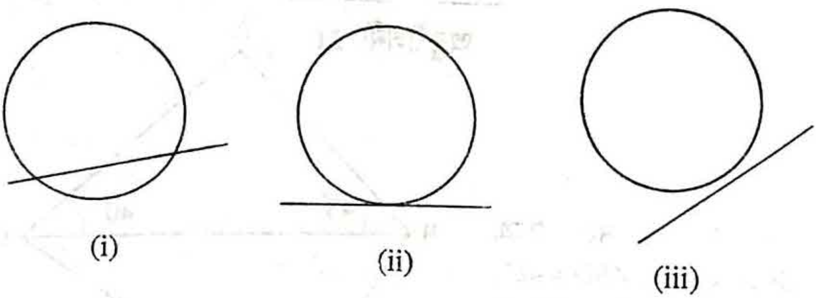
5. ABC ত্রিভুজের AC ও AB বাহুর উপর BE ও CF যথাক্রমে লম্ব। প্রমাণ কর যে, B, C, E, F সমবৃত্তস্থ। এ থেকে প্রমাণ কর যে, ΔAEF ও ΔABC সদৃশকোণী।

6. $ABCD$ একটি সামান্তরিক। A ও B বিন্দুগামী একটি বৃত্ত AD, BC-কে (বা তাদের বর্ধিত অবস্থায়) E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, E, F, C, D (বা E, C, F, D) সমবৃত্তস্থ।

7. $ABCD$ এমন একটি চতুর্ভুজ যার $AB + DC = AD + BC$. AB, BC, CD, DA-এর উপর যথাক্রমে P, Q, R, S বিন্দুগুলি এমনভাবে নেওয়া হল যে, $AP = AS$, $BP = BQ$ এবং $CQ = CR$ হয়। প্রমাণ কর যে, $PQRS$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

2.1. স্পর্শক ঃ

আমরা পূর্বেই দেখেছি যে একটি সরলরেখা যদি কোনো বৃত্তকে ছেদ করে, তাহলে অধিকপক্ষে দুটি বিন্দুতে ছেদ করবে। কিন্তু সরলরেখা বৃত্তকে ছেদ করবেই এমন কোনো মানে নেই। প্রকৃতপক্ষে একটি বৃত্তের সমতলে যদি আমরা বিভিন্ন সরলরেখা অঙ্কন করি, তাহলে নিম্নলিখিত তিন রকম অবস্থার উদ্ভব হতে পারে।



চিত্র নং ঃ 147

(i) সরলরেখা বৃত্তকে দুটি বিন্দুতে ছেদ করবে [চিত্র নং *147 (i)*] এক্ষেত্রে সরলরেখাটিকে আমরা বলি বৃত্তের ছেদক।

(ii) সরলরেখা বৃত্তকে ছুঁয়ে যাবে অর্থাৎ বৃত্তের সঙ্গে একটি মাত্র বিন্দুতে মিলিত হবে। [চিত্র নং *147 (ii)*] এক্ষেত্রে সরলরেখাটিকে আমরা বৃত্তের স্পর্শক বলি।

(iii) সরলরেখা বৃত্তকে ছেদ করবে না [চিত্র নং 147 *(iii)*]।

উপরের আলোচনা থেকে আমরা ছেদকের ও স্পর্শকের সংজ্ঞা দিতে পারি।

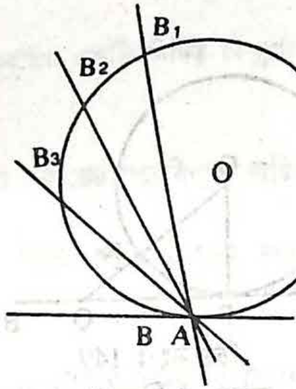
সংজ্ঞা ঃ 1. ছেদক—যে সরলরেখা কোনো বৃত্তকে দুটি বিন্দুতে ছেদ করে, সেই সরলরেখাকে বৃত্তের ছেদক বলা হয়।

2. স্পর্শক—যে সরলরেখা কোনো বৃত্তের সঙ্গে একটি মাত্র বিন্দুতে মিলিত হয়, সেই সরলরেখাকে বৃত্তের ওই বিন্দুতে স্পর্শক বলা হয়। যে বিন্দুতে বৃত্ত ও স্পর্শক মিলিত হয়, অর্থাৎ যে বিন্দুতে স্পর্শকটি বৃত্তকে স্পর্শ করে, সেই বিন্দুকে বলা হয় স্পর্শবিন্দু।

[মন্তব্য ঃ স্পর্শকের উপর অবস্থিত বিন্দুগুলির মধ্যে একমাত্র স্পর্শবিন্দু বৃত্তের উপর অবস্থিত হবে, অপর বিন্দুগুলি বৃত্তের বাইরে অবস্থিত হবে।]

এখন আমরা বৃত্তের সঙ্গে সরলরেখার স... ...আর একটু বিচার করি। মনে করি, *O*-কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তকে একটি সরলরে... *A*, *B* দুটি বিন্দুতে ছেদ

করেছে। এবার A বিন্দুকে স্থির রেখে সরলরেখাটিকে যদি ঘোরানো হয় (যেমন 148 নং চিত্রে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘোরানো হয়েছে) তাহলে দেখব, ক্রমশঃ অপর ছেদবিন্দুটি A বিন্দুর নিকটবর্তী হচ্ছে।



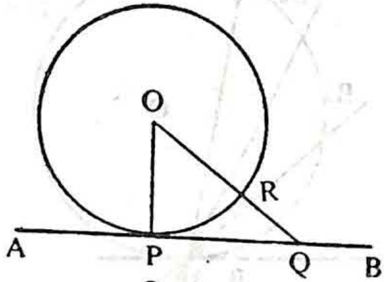
চিত্র নং : 148

এরূপ ঘোরানোর ফলে সরলরেখাটির অবস্থান এমন হতে পারে যে অপর ছেদবিন্দুটি A বিন্দুর সঙ্গে মিশে যাবে, অর্থাৎ দুটি ছেদবিন্দুই A বিন্দুতে সমাপতিত হবে। তখন সরলরেখাটি A বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক হবে। তাহলে আমরা বলতে পারি যে, একটি সরলরেখা যখন বৃত্তকে দুটি সমাপতিত বিন্দুতে ছেদ করে, তখনই সেই সরলরেখা ওই বিন্দুতে স্পর্শক।

এবার আমরা কোনো বৃত্তের স্পর্শকের সঙ্গে স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের সম্পর্কটি পরের উপপাদ্যে প্রতিষ্ঠা করব।

উপপাদ্য 43

বৃত্তের কোনো বিন্দুতে স্পর্শক ও ওই স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত।



চিত্র নং ঃ 149

ধরা যাক, O-কেন্দ্রীয় বৃত্তের P বিন্দুতে AB স্পর্শক এবং OP, P বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।

প্রমাণ করতে হবে যে, OP ও AB পরস্পর লম্ব।

অঙ্কন ঃ AB স্পর্শকের উপর অপর যেকোনো একটি বিন্দু Q নেওয়া হল। O, Q যুক্ত করা হল।

প্রমাণ ঃ যেহেতু AB-এর উপর অবস্থিত P বিন্দু ব্যতীত অপর যেকোনো বিন্দু বৃত্তের বাইরে অবস্থিত, সুতরাং OQ বৃত্তকে একটি বিন্দুতে ছেদ করবে। মনে করি, ছেদবিন্দু R.

$\therefore OR < OQ$ ($\because$ R বিন্দু O, Q-এর অন্তর্বর্তী)।

আবার, $OR = OP$ (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ),

$\therefore OP < OQ$.

$\because$ Q বিন্দু AB- এর উপর যেকোনো বিন্দু,

$\therefore$ O বিন্দু থেকে AB পর্যন্ত যত রেখাংশ অঙ্কন করা যায় OP তাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম।

$\therefore OP \perp AB$.

অনুসিদ্ধান্ত ঃ 1. বৃত্তের উপর অবস্থিত কোনো বিন্দুতে সেই বিনদুগামী ব্যাসার্ধের উপর অঙ্কিত লম্ব ওই বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক হবে।

2. বৃত্তের উপর অবস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে একটি মাত্র স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

3. বৃত্তের যেকোনো স্পর্শকের স্পর্শবিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব কেন্দ্রগামী হবে।

4. কোনো বৃত্তের কেন্দ্র থেকে কোনো স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্ব স্পর্শবিন্দুগামী হবে।

[মন্তব্য ঃ একটি সরলরেখার উপরিস্থিত কোনো বিন্দুতে একটি মাত্র লম্ব অঙ্কন করা যেতে পারে, বা, একটি সরলরেখার বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে সেই সরলরেখার উপর একটি মাত্র লম্ব অঙ্কন করা যেতে পারে–এই ধর্ম থেকেই আমরা উপরের অনুসিদ্ধান্তগুলিতে উপনীত হতে পারি।]

কয়েকটি প্রয়োগ ঃ

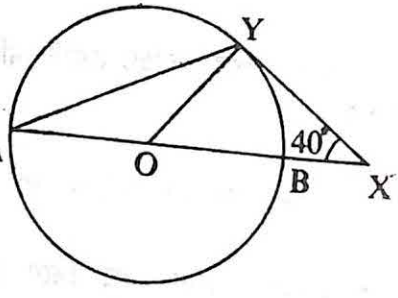
1. 150 নং চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র । YX, Y বিন্দুতে স্পর্শক । $\angle AXY = 40^\circ$, $\angle$ $\angle AYO$-এর মান কত ? যুক্তি দাও ।

উত্তর ঃ $\angle AYO = 25^\circ$

প্রমাণ ঃ $\because$ XY স্পর্শক এবং OY স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ,

$\therefore \angle XYO = 90^\circ$

$\therefore \Delta OXY$-এর



চিত্র নং ঃ 150

$\angle XOY = 180^\circ - (90^\circ + 40^\circ)$

$= 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$

আবার, $OA = OY$ (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ),

$\therefore$ ΔAOY–এর $\angle OAY = \angle OYA$.

$\therefore$ বহিঃস্থ $\angle XOY = \angle OAY + \angle OYA = 2\angle OYA$

$\therefore 2\angle OYA = 50^\circ$,

বা, $\angle OYA = 25^\circ$,

$\therefore \angle AYO = 25^\circ$.

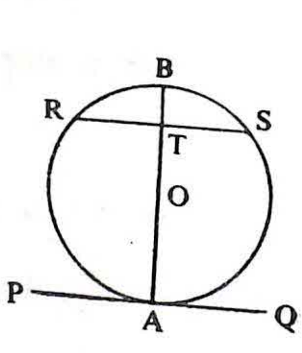
2. O-কেন্দ্রীয় কোনো বৃত্তের AB একটি ব্যাস । A বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক PAQ. PAQ স্পর্শকের সমান্তরাল একটি জ্যা হল RS. প্রমাণ কর যে, AB, RS-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক ।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক, AB, RS-কে T বিন্দুতে ছেদ করে ।

$\because$ PAQ, A বিন্দুতে স্পর্শক এবং AB ব্যাস,

$\therefore AB \perp PAQ$.

আবার, $\because$ $PAQ \parallel RS$ এবং AB ছেদক এবং $AB \perp PAQ$ (প্রমাণিত),



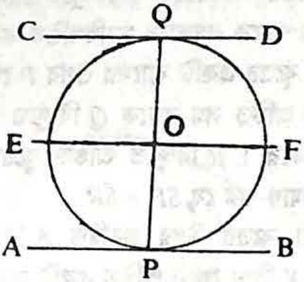
$\therefore AB \perp RS$, অর্থাৎ $OT \perp RS$.

চিত্র নং ঃ 151

$\because OT \perp RS$

$\therefore T, RS$-এর মধ্যবিন্দু । $\therefore AB, RS$-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক ।

3. O-কেন্দ্রীয় কোনো বৃত্তের PQ একট ব্যাস । P ও Q বিন্দুতে অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শকদ্বয় যথাক্রমে APB ও CQD. প্রমাণ কর যে, $AB \parallel CD$.



চিত্র নং ঃ 152

অঙ্কন ঃ O বিন্দু দিয়ে AB-এর সমান্তরাল সরলরেখা EF অঙ্কন করা হল ।

প্রমাণ ঃ $OP \perp AB$ ($\because APB$ স্পর্শক এবং OP স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ্য) ।

আবার, $\because AB \parallel EF$, $\therefore OP \perp EF$.

$\therefore OQ \perp EF$ ($\because OP, OQ$ একই সরলরেখা) ।

$\because CQD, Q$ বিন্দুতে স্পর্শক এবং OQ স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ

$\therefore OQ \perp CD$

আবার, $EF \parallel CD$ ($\because OQ \perp EF$ এবং $OQ \perp CD$).

$\therefore AB \parallel CD$.

অনুশীলনী 22

1. O-কেন্দ্রীয় কোনো বৃত্তের AB একটি জ্যা । B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শককে বর্ধিত AO, T বিন্দুতে ছেদ করে । $\angle BAT = 21^\circ$ হলে, $\angle BTA$-এর মান নির্ণয় কর ।

2. কোনো বৃত্তের XY একটি ব্যাস । অপর একটি বিন্দু A বৃত্তের উপর অবস্থিত । A বিন্দুতে PAQ বৃত্তের স্পর্শক । X বিন্দু থেকে বৃত্তের স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্ব PAQ-কে Z বিন্দুতে ছেদ করে । প্রমাণ কর যে, XY, $\angle YXZ$-এর সমদ্বিখণ্ডক ।

3. কোনো বৃত্তের PR একটি ব্যাস। P বিন্দুতে অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শকের উপর S এমন একটি বিন্দু নেওয়া হল যে $PR = PS.RS$ বৃত্তকে T বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $ST = RT = PT$ ।

4. O-কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের OA ও OB দুটি ব্যাসার্ধ লম্বভাবে অবস্থিত। A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পরকে T বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AB = OT$ এবং তারা পরস্পরকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

5. O-কেন্দ্রীয় কোনো বৃত্তের একটি ব্যাসের উপর P যেকোনো একটি বিন্দু। ঐ ব্যাসের উপর O বিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। বর্ধিত QP বৃত্তকে R বিন্দুতে ছেদ করে। R বিন্দুতে অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শক বর্ধিত O-কে S বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $SP = SR$.

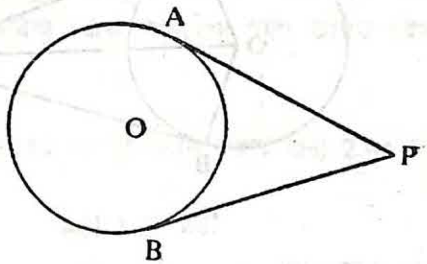
6. O-কেন্দ্রীয় কোনো বৃত্তের উপর অবস্থিত A বিন্দুতে স্পর্শকের উপর X যেকোনো একটি বিন্দু। X বিন্দু থেকে অঙ্কিত একটি ছেদক বৃত্তকে Y ও Z বিন্দুতে ছেদ করে। YZ-এর মধ্যবিন্দু P. প্রমাণ কর যে, $XAPO$ বা $XAOP$ একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

7. কোনো বৃত্তের AC ও BD দুটি জ্যা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটি পরস্পরকে P বিন্দুতে এবং C ও D বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটি পরস্পরকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে,

$\angle P + \angle Q = 2\angle BOC.$

8. O-কেন্দ্রীয় কোনো বৃত্তের QR একটি জ্যা। Q ও R বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটি পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করে। QM বৃত্তের একটি ব্যাস। প্রমাণ কর যে, $\angle QPR = 2\angle RQM.$

2.9 আমরা দেখেছি যে, বৃত্তের কোনো ব্যাসের প্রান্তবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটি পরস্পর সমান্তরাল হবে। অপর যেকোনো দুটি বিন্দুতে যদি স্পর্শক অঙ্কন করা যায়, তাহলে তারা পরস্পরকে বৃত্তের বাইরে কোনো বিন্দুতে ছেদ করবে অর্থাৎ আমরা বলতে পারি, বৃত্তের বাইরে অবস্থিত কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তের দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায়। 153 নং চিত্রে O-কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে PA ও PB দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা যাবে।

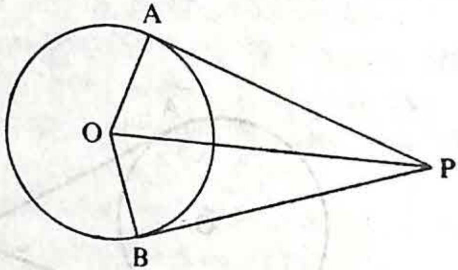


চিত্র নং ঃ 153

এই স্পর্শক দুটির মধ্যে কি সম্পর্ক তা আমরা পরের উপপাদ্যে প্রতিষ্ঠা করব।

উপপাদ্য 44

বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে যে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায়, তাদের স্পর্শবিন্দু দুটির সঙ্গে বহিঃস্থ বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ দুটি সমান এবং তারা কেন্দ্রে সমান কোণ উৎপন্ন করে।



চিত্র নং : 154

ধরা যাক, O-কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ P বিন্দু থেকে PA ও PB দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা হয়েছে, যাদের স্পর্শবিন্দু যথাক্রমে A ও B.

O, A ; O, B ; O, P যুক্ত করা হয়েছে, ফলে PA ও PB কেন্দ্রে যথাক্রমে $\angle POA$ ও $\angle POB$ উৎপন্ন করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, (i) $PA = PB$.

(ii) $\angle POA = \angle POB$

প্রমাণ : PA ও PB স্পর্শক এবং OA ও OB স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ,

$\therefore OA \perp PA$ এবং $OB \perp PB$.

$\therefore \Delta PAO$ এবং ΔPBO সমকোণী ত্রিভুজ।

সমকোণী ত্রিভুজ ΔPAO এবং ΔPBO–এর

অতিভুজ PO সাধারণ বাহু,

$OA = OB$ (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ),

$\therefore \Delta PAO \cong \Delta PBO$

$\therefore PA = PB$ (অনুরূপ বাহু) ....(i)

এবং $\angle POA = \angle POB$ (অনুরূপ কোণ) ....(ii)

অনুসিদ্ধান্ত ঃ 1. বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত দুটি স্পর্শকের অন্তর্ভূত কোণকে ওই বিন্দু এবং কেন্দ্রের সংযোজক সরলরেখা সমদ্বিখণ্ডিত করে।

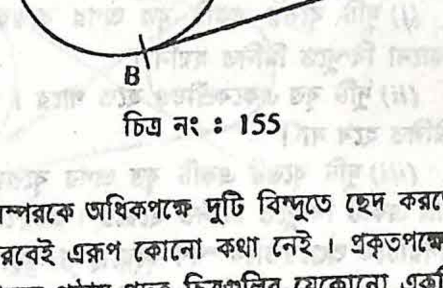
2. বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত দুটি স্পর্শকের অন্তর্ভূত কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক কেন্দ্রগামী হবে।

3. বৃত্তের উপরিস্থিত দুটি বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটি যদি পরস্পরকে ছেদ করে, তাহলে ছেদবিন্দু থেকে স্পর্শবিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত রেখাংশের দৈর্ঘ্য সমান হবে।

[মন্তব্য ঃ (1) ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন করার জন্য 2 নং অনুসিদ্ধান্তকেই ব্যবহার করা হয়েছে।

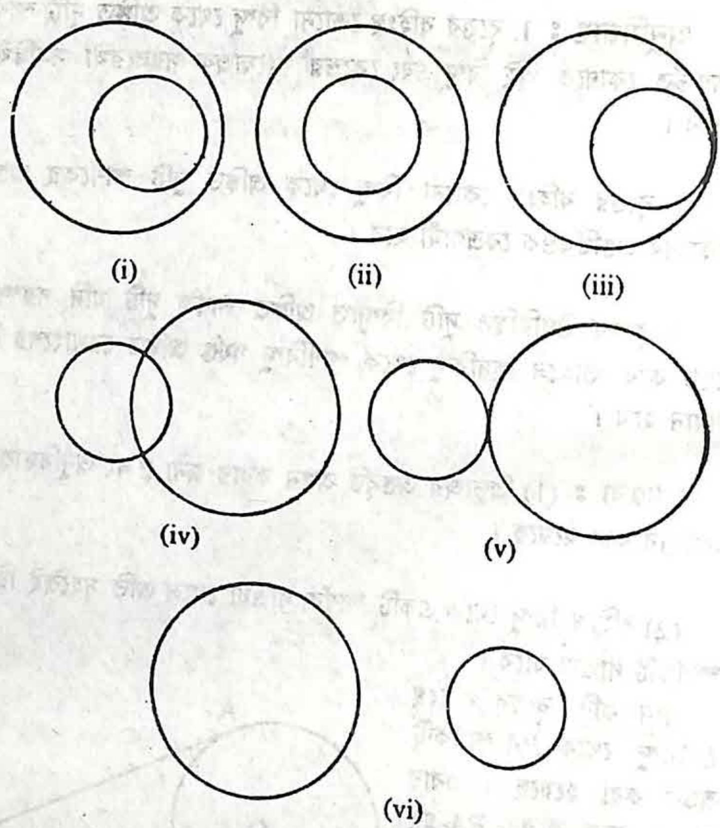
(2) বহিঃস্থ বিন্দু থেকে একটি স্পর্শক পাওয়া গেলে অতি সহজেই দ্বিতীয় স্পর্শকটি পাওয়া যাবে।

মনে করি, বৃত্তের বহিঃস্থ P-বিন্দু থেকে PA স্পর্শকটি অঙ্কন করা হয়েছে। এবার P-কে কেন্দ্র করে PA-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তচাপটি বৃত্তকে B বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে PB-ই হবে দ্বিতীয় স্পর্শক।]



চিত্র নং ঃ 155

আমরা দেখেছি দুটি বৃত্ত পরস্পরকে অধিকপক্ষে দুটি বিন্দুতে ছেদ করতে পারে। কিন্তু পরস্পরকে ছেদ করবেই এরূপ কোনো কথা নেই। প্রকৃতপক্ষে, একই সমতলে অঙ্কিত দুটি বৃত্ত পরের পৃষ্ঠায় প্রদত্ত চিত্রগুলির যেকোনো একটি অবস্থায় থাকতে পারে।



চিত্র নং : 156

(i) দুটি বৃত্তের একটি বৃত্ত অপর বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত এবং তারা কোনো বিন্দুতে মিলিত হয়নি।

(ii) দুটি বৃত্ত এককেন্দ্রীয়ও হতে পারে। সেক্ষেত্রেও তারা কোনো বিন্দুতে মিলিত হবে না।

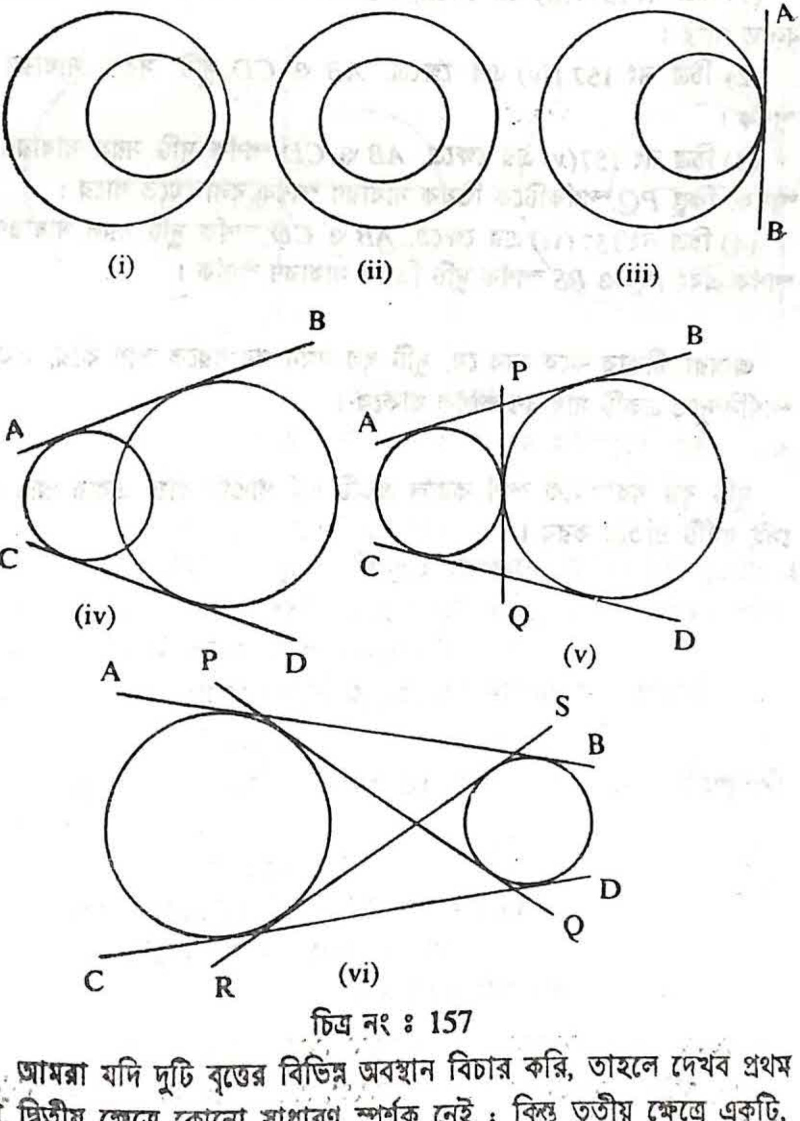
(iii) দুটি বৃত্তের একটি বৃত্ত অপর বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত এবং তারা মাত্র একটি বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। এক্ষেত্রে আমরা বলব বৃত্ত দুটির একটি অপরটিকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করেছে বা অন্তঃস্পর্শ করেছে।

(iv) দুটি বৃত্ত পরস্পরকে দুটি বিন্দুতে ছেদ করেছে।

(v) দুটি বৃত্তের একটি অপরটির বহিঃস্থ এবং তারা মাত্র একটি বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। এক্ষেত্রে আমরা বলব বৃত্ত দুটি একটি অপরটিকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করেছে বা বহিঃস্পর্শ করেছে।

(vi) দুটি বৃত্ত পরস্পরকে ছেদও করেনি বা স্পর্শও করেনি।

সাধারণ স্পর্শক : একটি সরলরেখা যদি দুটি বৃত্তের প্রত্যেককেই স্পর্শ করে, তাহলে ওই সরলরেখাটিকে বৃত্ত দুটির সাধারণ স্পর্শক বলা হয়।



চিত্র নং : 157

আমরা যদি দুটি বৃত্তের বিভিন্ন অবস্থান বিচার করি, তাহলে দেখব প্রথম বা দ্বিতীয় ক্ষেত্রে কোনো সাধারণ স্পর্শক নেই ; কিন্তু তৃতীয় ক্ষেত্রে একটি, চতুর্থ ক্ষেত্রে দুটি, পঞ্চম ক্ষেত্রে তিনটি এবং ষষ্ঠ ক্ষেত্রে চারটি সাধারণ স্পর্শক আছে।

এসব সাধারণ স্পর্শকের যেগুলির একই পার্শ্বে বৃত্ত দুটি অবস্থিত, সেগুলিকে সরল সাধারণ স্পর্শক বলা হয় এবং যেগুলির বিপরীত পার্শ্বে বৃত্ত দুটি অবস্থিত, সেগুলিকে তির্যক সাধারণ স্পর্শক বলা হয়।

(1) চিত্র নং 157 *(iii)* এর ক্ষেত্রে, AB স্পর্শকটিকে সরল সাধারণ স্পর্শক বলতে পারি।

(2) চিত্র নং 157 *(iv)* এর ক্ষেত্রে, AB ও CD দুটি সরল সাধারণ স্পর্শক।

(3) চিত্র নং 157*(v)* এর ক্ষেত্রে, AB ও CD স্পর্শক দুটি সরল সাধারণ স্পর্শক, কিন্তু PQ স্পর্শকটিকে তির্যক সাধারণ স্পর্শক বলা যেতে পারে।

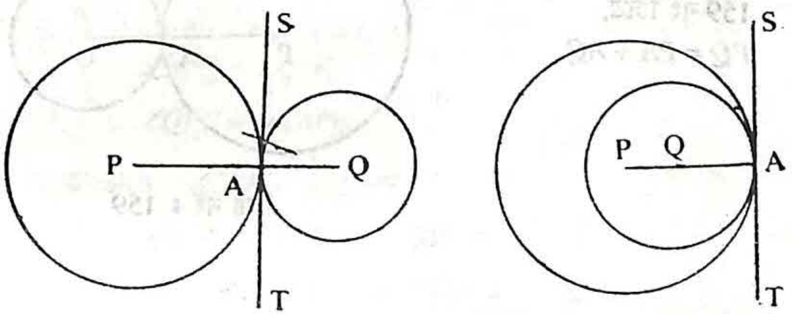
(4) চিত্র নং 157 *(vi)* এর ক্ষেত্রে, AB ও CD স্পর্শক দুটি সরল সাধারণ স্পর্শক এবং PQ ও RS স্পর্শক দুটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক।

আমরা স্বীকার করে নেব যে, দুটি বৃত্ত যখন পরস্পরকে স্পর্শ করে, তখন স্পর্শবিন্দুতে একটি সাধারণ স্পর্শক থাকবে।

দুটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করলে একটি ধর্ম পাওয়া যায়, এবার আমরা সেই ধর্মটি প্রতিষ্ঠা করব।

উপপাদ্য 45

যদি দুটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করে, তাহলে স্পর্শবিন্দুটি কেন্দ্র দুটির সংযোজক সরলরেখার উপর অবস্থিত হবে।



চিত্র নং : 158

ধরা যাক, P ও Q-কেন্দ্রীয় দুটি বৃত্ত পরস্পরকে A বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে P, A, Q সমরেখ।

অঙ্কন : P, A ও Q, A যুক্ত করা হল।

প্রমাণ : যেহেতু বৃত্ত দুটি A বিন্দুতে পরস্পরকে স্পর্শ করেছে, সুতরাং A বিন্দুতে একটি সাধারণ স্পর্শক আছে। মনে করি, ST হল সাধারণ স্পর্শক যা দুটি বৃত্তকেই A বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।

$\because$ P-কেন্দ্রীয় বৃত্তের ST স্পর্শক এবং PA স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ,

$\therefore PA \perp ST$

আবার, $\because$ Q-কেন্দ্রীয় বৃত্তের ST স্পর্শক এবং QA স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ,

$\therefore QA \perp ST$

$\therefore PA$ ও QA একই বিন্দুতে ST এর উপর লম্ব।

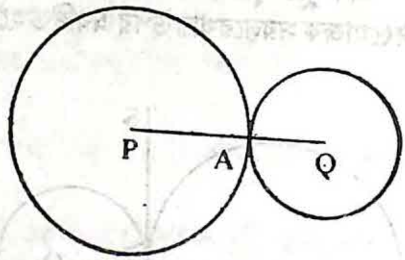
$\therefore PA$ ও QA একই সরলরেখায় অবস্থিত,

অর্থাৎ P, A, Q বিন্দু তিনটি সমরেখ।

অনুসিদ্ধান্ত 1. দুটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করলে, একটির কেন্দ্র ও স্পর্শবিন্দুগামী সরলরেখা অপর বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যাবে।

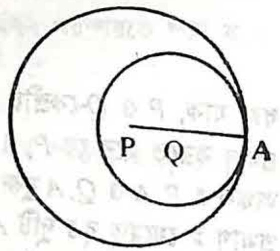
2. দুটি বৃত্ত বহিঃস্পর্শ করলে, কেন্দ্র দুটির দূরত্ব ব্যাসার্ধ দুটির দৈর্ঘ্যের সমান হবে।

159 নং চিত্রে,
$PQ = PA + AQ$.



চিত্র নং : 159

3. দুটি বৃত্ত অন্তঃস্পর্শ করলে, কেন্দ্র দুটির দূরত্ব ব্যাসার্ধ দুটির দৈর্ঘ্যের অন্তরফলের সমান হবে।
160 নং চিত্রে,
$PQ = PA - AQ$.

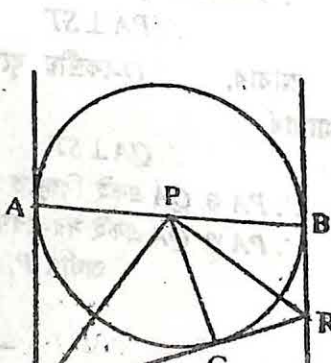


চিত্র নং : 160

কয়েকটি প্রয়োগ :

1. কোনো বৃত্তের কেন্দ্র P বৃত্তের কোনো ব্যাসের প্রান্তবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটিকে অপর একটি বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক Q এবং R বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $\angle QPR$ একটি সমকোণ।

ধরাযাক, P-কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB একটি ব্যাস। C, বৃত্তের উপর অবস্থিত একটি বিন্দু। A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটিকে C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক যথাক্রমে Q ও R বিন্দুতে ছেদ করেছে। Q, P ও R, P যুক্ত করা হল।



চিত্র নং : 161

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle QPR = 1$ সমকোণ।

অঙ্কন ঃ P, C যুক্ত করা হল।

প্রমাণ ঃ যেহেতু A ও C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটি Q বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করেছে। সুতরাং, আমরা ধরে নিতে পারি যে, Q বিন্দু থেকে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা হয়েছে।

$\therefore \angle APQ = \angle QPC.$

$\therefore \angle QPC = \frac{1}{2}\angle APC.$

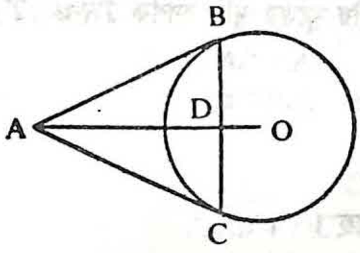
অনুরূপভাবে, $\angle CPR = \frac{1}{2}\angle CPB.$

$\therefore \angle QPR = \angle QPC + \angle CPR$

$= \frac{1}{2}(\angle APC + \angle CPB) = \frac{1}{2}\angle APB$

$= \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ.$

2. AB ও AC, O-কেন্দ্রীয় বৃত্তের স্পর্শক। প্রমাণ কর যে, AO রেখাংশ স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা-কে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।



চিত্র নং ঃ 162

মনে করা যাক, AO স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে, AO, BC-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক।

প্রমাণ ঃ AB ও AC, O-কেন্দ্রীয় বৃত্তের স্পর্শক, $\therefore AB = AC$

এবং AO, $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক

অর্থাৎ, $\angle BAD = \angle CAD.$

ΔABD ও ΔACD-এর $AB = AC$ (প্রমাণিত), AD সাধারণ বাহু

এবং অন্তর্ভূত $\angle BAD =$ অন্তর্ভূত $\angle CAD$.

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD.$

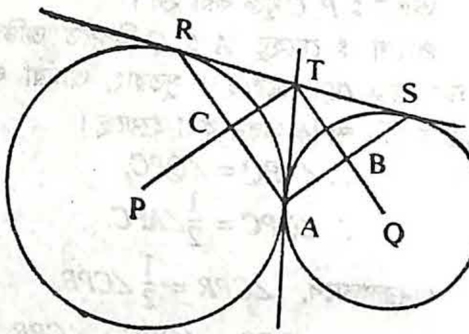
$\therefore BD = DC$ (অনুরূপ বাহু)

এবং $\angle BDA = \angle CDA.$

$\therefore AD \perp BC.$

$\therefore AO$, BC-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক।

3. P ও Q-কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত পরস্পরকে A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। বৃত্ত দুটির একটি সরল সাধারণ স্পর্শক বৃত্ত দুটিকে যথাক্রমে R ও S বিন্দুতে স্পর্শ করে। প্রমাণ কর যে, (i) A বিন্দুতে অঙ্কিত সাধারণ স্পর্শক RS রেখাংশকে T বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে, (ii) $\angle RAS = 1$ সমকোণ,



চিত্র নং ঃ 163

(iii) যদি PT ও QT, AR ও AS-কে যথাক্রমে C ও B বিন্দুতে ছেদ করে, তাহলে $ABTC$ একটি আয়তক্ষেত্র হবে।

প্রমাণ ঃ (i) ধরা যাক, A বিন্দুতে স্পর্শক RS-কে T বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ আমরা T বিন্দু থেকে P-কেন্দ্রীয় বৃত্তের দুটি স্পর্শক TR ও TA পাচ্ছি।

$\therefore TR = TA.$

অনুরূপভাবে, $TS = TA,$

$\therefore TR = TS$

$\therefore AT$, RS-কে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে।

(ii) ΔATR এর

$TR = TA$

$\therefore \angle TAR = \angle TRA.$

অনুরূপভাবে, $\angle TAS = \angle TSA$

$\therefore \angle RAS = \angle TAR + \angle TAS$

$= \angle TRA + \angle TSA$

$\therefore \angle RAS = 90^\circ = 1$ সমকোণ।

(iii) PT, $\angle RTA$-এর সমদ্বিখণ্ডক

এবং QT, $\angle ATS$-এর সমদ্বিখণ্ডক,

$\therefore PT \perp QT.$

$\therefore \angle PTQ = 1$ সমকোণ।

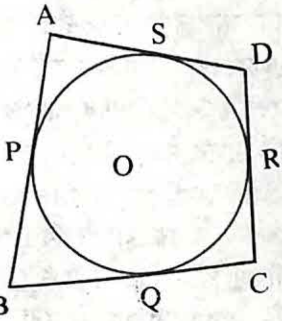
আবার, $PT \perp RA$ এবং $QT \perp SA$.

$$\therefore \angle ACT = \angle ABT = 1 \text{ সমকোণ।}$$

$$\therefore ABTC \text{ একটি আয়তক্ষেত্র।}$$

4. একটি চতুর্ভুজ একটি বৃত্তের পরিলিখিত হলে, প্রমাণ কর, যেকোনো বিপরীত বাহুর সমষ্টি, অপর দুটি বিপরীত বাহুর সমষ্টির সমান হবে।

ধরা যাক, $ABCD$ চতুর্ভুজটি O-কেন্দ্রীয় বৃত্তের পরিলিখিত। AB, BC, CD, DA বাহুগুলি যথাক্রমে P, Q, R, S বিন্দুতে বৃত্তকে স্পর্শ করেছে।



চিত্র নং : 164

প্রমাণ করতে হবে যে,

$AB + DC = AD + BC$.

প্রমাণ : $\therefore AP$ ও AS বৃত্তের স্পর্শক,

$\therefore AP = AS$.

অনুরূপভাবে, $BP = BQ$,

$DR = DS$,

$CR = CQ$.

$$\begin{aligned}\therefore AB + DC &= AP + BP + DR + CR\\ &= AS + BQ + DS + CQ\\ &= AS + DS + BQ + CQ\\ &= AD + BC.\end{aligned}$$

অনুশীলনী 23

1. দুটি বৃত্ত পরস্পরকে A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করে। PQ ওই বৃত্ত দুটির একটি সরল সাধারণ স্পর্শক। প্রমাণ কর যে, $\angle PAQ$ এক সমকোণ। যদি PR একটি ব্যাস হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, Q, A, R সমরেখ।

2. প্রমাণ কর যে, কোনো দুটি পরস্পরছেদী সরলরেখাকে স্পর্শ করে এমন বৃত্তের কেন্দ্র ওই সরলরেখা দুটির অন্তর্ভুত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত হবে।

3. প্রমাণ কর যে, কোনো বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজের যেকোনো দুটি বিপরীত বাহু কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে, তারা পরস্পর সম্পূরক।

4. P, Q-কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করেছে। স্পর্শবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত কোনো সরলরেখা P-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে A বিন্দুতে ও Q-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে B বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AP \parallel BQ$.

5. X, Y-কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করেছে। স্পর্শবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত কোনো সরলরেখা X-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে R বিন্দুতে এবং Y-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে S বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, R বিন্দুতে X-কেন্দ্রীয় বৃত্তের স্পর্শক ও S বিন্দুতে Y-কেন্দ্রীয় বৃত্তের স্পর্শক পরস্পর সমান্তরাল।

6. তিনটি সমান বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করেছে। প্রমাণ কর যে, ঐ বৃত্ত তিনটির কেন্দ্রগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

7. O-কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ A বিন্দু থেকে AP ও AQ স্পর্শক টানা হল, যাদের স্পর্শবিন্দু দুটি যথাক্রমে P ও Q. প্রমাণ কর যে, A, P, O, Q সমবৃত্তস্থ।

8. একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু A থেকে অঙ্কিত AB ও BC দুটি স্পর্শক। উপচাপ BC-এর উপর অবস্থিত X বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক AB ও AC-কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, ΔADE-এর পরিসীমা $= 2AB$.

9. কোনো বৃত্তের বহিঃস্থ দুটি বিন্দু P ও Q. P বিন্দু থেকে অঙ্কিত স্পর্শক দুটির অন্তর্ভূত কোণ, Q বিন্দু থেকে অঙ্কিত স্পর্শক দুটির অন্তর্ভূত কোণের সমান। প্রমাণ কর যে, কেন্দ্র থেকে P ও Q বিন্দুর দূরত্ব সমান।

10. O-কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের AB ও AC দুটি নির্দিষ্ট স্পর্শক। অপর একটি স্পর্শক AB স্পর্শককে P এবং AC স্পর্শককে Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, ওই স্পর্শকটির যেকোনো অবস্থানেই $\angle POQ$-এর মান অপরিবর্তিত থাকবে।

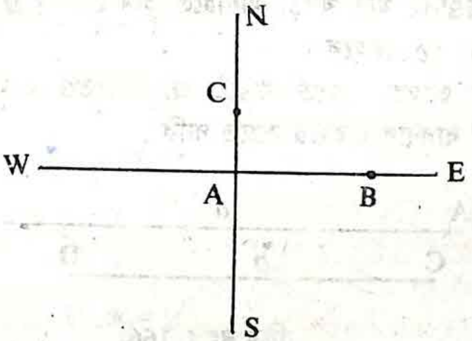
পঞ্চম অধ্যায়

সদৃশতা

3.1 অনুপাত ও সমানুপাত ঃ

'অনুপাত' ও 'সমানুপাতের' সঙ্গে পাটীগণিত ও বীজগণিতে তোমাদের পরিচিতি ঘটেছে। জ্যামিতিতে এই ধারণার ব্যবহার কিভাবে করা যায়, তার আলোচনাই আমরা এখন করব।

তুমি যে গ্রামে বা শহরে বাস কর, সেখানে তোমার বাড়ি থেকে স্কুলের দূরত্ব যদি 1 কিমি পূর্বদিকে এবং তোমার এক বন্ধুর বাড়ি যদি 400 মিটার উত্তরদিকে হয়, তাহলে তোমার খাতায় এই দূরত্ব তুমি কিভাবে দেখাবে ?



চিত্র নং ঃ 165

তোমার বাড়ি যদি A অবস্থানে হয়, তাহলে মনে কর, তুমি A-এর পূর্ব দিকে 5 সেমি দূরে B অবস্থানে স্কুলের অবস্থান দেখালে। এবার তোমার বন্ধুর বাড়ির অবস্থান কোথায় দেখাবে বলোতো। সেই অবস্থানটি তোমাকে উত্তর দিকে এমন একটি অবস্থান C-তে দেখাতে হবে যাতে A থেকে C-এর দূরত্ব 2 সেমি হয়। কারণ,

1 কিমি : 400 মিটার = 1000 মিটার : 400 মিটার = 5 : 2, আবার,
5 সেমি : 2 সেমি = 5 : 2 ;

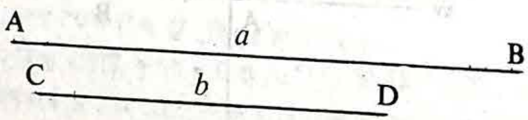
অর্থাৎ, AB রেখাংশ ও AC রেখাংশের দৈর্ঘ্যের অনুপাত হবে 5 : 2.

আরও একটি উদাহরণ নেওয়া যাক । তোমরা ভূগোলের ক্লাশে ভারতবর্ষের দেওয়াল মানচিত্র দেখেছ । আবার, তোমরা নিজেরাও ভারতবর্ষের খসড়া মানচিত্র আঁকতে শিখেছ বা একটা খসড়া মানচিত্রে ভারতবর্ষে অবস্থিত স্থানগুলির অবস্থান দেখাতে শিখেছ।

কলকাতা থেকে দিল্লী ও বোম্বাই এর দূরত্ব যথাক্রমে আনুমানিক 1287 কিমি ও 1529 কিমি। একটি দেওয়াল মানচিত্রে এই দূরত্বগুলি যথাক্রমে 31 সেমি ও 37 সেমি দেখান হয়েছে । তোমার খসড়া মানচিত্রে এই দূরত্বগুলি তুমি কিভাবে দেখাবে ? দেওয়াল মানচিত্রের তুলনায় তোমার খসড়া মানচিত্র অনেক ছোট । অতএব মানচিত্র দুটির আকৃতি এক রকম হলেও দূরত্বগুলি কিন্তু এক রকম হবে না । তোমার খসড়া মানচিত্রের 5 গুণ যদি দেওয়াল মানচিত্র হয়, তাহলে তোমাকে কিন্তু ঐ দূরত্বগুলি দেখাতে হবে যথাক্রমে 6·2 সেমি ও 7·4 সেমি ; কারণ $31 : 37 = 6{\cdot}2 : 7{\cdot}4$.

উপরের এই আলোচনা থেকে আমরা বলতে পারি একটি স্থান থেকে অপর দুটি স্থানের দূরত্ব যদি দেওয়াল মানচিত্রে a সেমি ও b সেমি দেখান হয় এবং ওই দূরত্বগুলিই যদি খসড়া মানচিত্রে তুমি c সেমি ও d সেমি দেখাও, তাহলে $a : b :: c : d$ হবে।

এ থেকে আমরা বুঝতে পারছি জ্যামিতিতেও আমরা 'অনুপাত' ও 'সমানুপাতের' ধারণার ব্যবহার করতে পারি।



চিত্র নং : 166

AB ও CD দুটি রেখাংশের দৈর্ঘ্য যদি 'a' ও 'b' হয়, তাহলে

$$\frac{AB \text{ রেখাংশের দৈর্ঘ্য}}{CD \text{ রেখাংশের দৈর্ঘ্য}} = \frac{a}{b}$$

আমরা এই দুটি রেখাংশের দৈর্ঘ্যের অনুপাতকে $\frac{AB}{CD}$ আকারে লিখব।

সমানুপাতের যে সকল ধর্ম আমরা পাটীগণিত বা বীজগণিতে পেয়েছি জ্যামিতির ক্ষেত্রেও সেগুলি প্রযোজ্য হবে। ধর্মগুলি হল :

1. a, b, c, d যদি চারটি রেখাংশের দৈর্ঘ্য হয় এবং যদি তারা সমানুপাতী হয়, অর্থাৎ, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হলে,

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c} \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d} \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$$

$$a.d=b.c \quad \ldots \quad \ldots \quad (iii)$$

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \quad \ldots \quad \ldots \quad (iv)$$

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \quad \ldots \quad \ldots \quad (v)$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d} \quad \ldots \quad \ldots \quad (vi)$$

2. $\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{r}=\ldots$ হলে,

$$\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{r}=\ldots=\frac{a+b+c+\ldots}{p+q+r+\ldots} \quad \ldots \quad (i)$$

$$=\frac{la+mb+nc+\ldots}{lp+mq+nr+\ldots} \quad \ldots \quad (ii)$$

3. a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হলে,

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c} \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

$$\text{বা, } ac=b^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$$

[মন্তব্য ঃ (1) 1. (iii)–এর জ্যামিতিক তাৎপর্য হল a, b বাহু বিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল এবং b, c বাহুবিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হবে।

(2) 3. *(ii)*–এর জ্যামিতিক তাৎপর্য হল a, c বাহুবিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল b বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হবে। এখান থেকে আমরা এ-ও বলতে পারি যে, b রেখাংশ a ও c রেখাংশের মধ্য-সমানুপাতী।

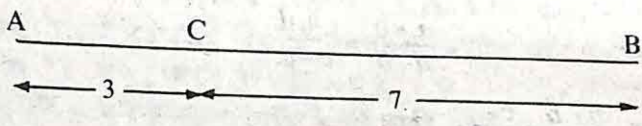
(3) রেখাংশের দৈর্ঘ্যের ক্ষেত্রে যেমন অনুপাত বা সমানুপাতের ধর্মগুলি প্রযোজ্য, তেমনি জ্যামিতিক চিত্রের ক্ষেত্রফলের ক্ষেত্রেও এই ধর্মগুলি প্রযোজ্য।]

আমরা পাটীগণিতে দেখেছি কোনো একটি রাশিকে একটি নির্দিষ্ট অনুপাতে দুটি অংশে বিভক্ত করলে ঐ অংশ দুটি কত হবে তা নির্ণয় করা সম্ভব।

যেমন '50 টাকাকে 3 : 7 অনুপাতে দুটি অংশ বিভক্ত করলে কোন অংশে কত টাকা হবে ?' এ প্রশ্নের উত্তরে আমরা পাব, প্রথম অংশ টাকার পরিমাণ হবে 15 এবং দ্বিতীয় অংশে হবে 35।

মোট টাকার পরিমাণ হবে অংশ দুটির সমষ্টি।

তোমরা জান, সংখ্যাকে আমরা রেখাংশ দ্বারা প্রকাশ করতে পারি। সেই ধারণা থেকে যদি 50 টাকাকে আমরা 10 সেমি একটি রেখাংশ *AB* দ্বারা

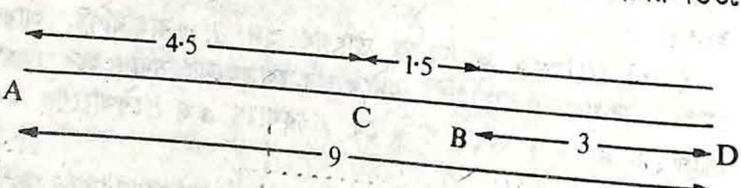


চিত্র নং : 167

প্রকাশ করি, এবং *AB*-এর অর্ন্তবর্তী যদি একটি বিন্দু *C* এমনভাবে নিই যে $AC = 3$ সেমি ও $CB = 7$ সেমি, তাহলে *AC* 15 টাকা এবং *CB* 35 টাকাকে নির্দেশ করবে, অর্থাৎ *AB* রেখাংশটি *C* বিন্দুতে 3 : 7 অনুপাতে বিভক্ত হল।

কিন্তু একটি রেখাংশকে বিভক্ত করার সময় আমাদের একটু অন্যভাবে বিচার করতে হবে। আমরা জানি একটি রেখাংশকে বর্ধিত করা সম্ভব। ফলে পূর্বোক্ত ক্ষেত্রে যেমন বিভাজন বিন্দুটি রেখাংশের ভিতরেই নিতে হয়েছে, তেমনি একটি রেখাংশকে বিভক্ত করার সময় বিভাজন বিন্দুটি রেখাংশের বাইরেও কিন্তু ওই সরলরেখার উপরেই অবস্থিত হতে পারে।

মনে করি, *AB* একটি 6 সেমি দৈর্ঘ্যের রেখাংশ। এই রেখাংশটিকে 3 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করতে হবে। আমরা যদি ঐ রেখাংশের ভিতরে



চিত্র নং : 168

একটি *C* বিন্দু এমনভাবে নিই যে $AC = 4{\cdot}5$ সেমি এবং $CB = 1{\cdot}5$ সেমি হয়, তাহলে *AB* রেখাংশটি *C* বিন্দুতে 3 : 1 অনুপাতে বিভক্ত হবে।

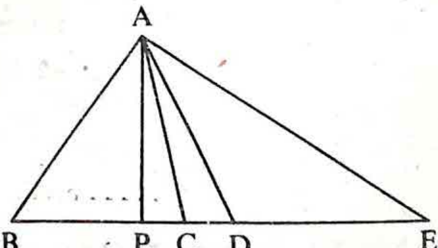
এবার, আবার AB-কে D বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যে, $BD = 3$ সেমি হয়, তাহলে $AD = 9$ সেমি এবং $BD = 3$ সেমি হল ; অর্থাৎ $\frac{AD}{BD} = \frac{3}{1}$ হল। এক্ষেত্রেও AB রেখাংশটি D বিন্দুতে $3:1$ অনুপাতে বিভক্ত হল। প্রথম ক্ষেত্রে অংশ দুটির যোগফল হবে মোট রেখাংশটি, আর দ্বিতীয় ক্ষেত্রে অংশ দুটির বিয়োগফল হবে মোট রেখাংশটি। তাহলে দেখা যাচ্ছে, একটি রেখাংশকে কোনো একটি নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্ত করলে, বিভাজন বিন্দু রেখাংশের ভিতরে অথবা বাইরে অবস্থিত হতে পারে। প্রথম ক্ষেত্রে, অর্থাৎ বিভাজন বিন্দু রেখাংশের ভিতরে অবস্থিত হলে, আমরা বলি রেখাংশটি ওই অনুপাতে **অন্তর্বিভক্ত** হয়েছে। দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, অর্থাৎ বিভাজনবিন্দু যখন রেখাংশের বাইরে (কিন্তু ওই সরলরেখার উপরেই) অবস্থিত হয়, তখন আমরা বলি রেখাংশটি ওই অনুপাতে **বহির্বিভক্ত** হয়েছে।

একটি অনুপাতে কিন্তু কেবল অন্তর্বিভক্তই করা যাবে, বহির্বিভক্ত করা যাবে না। বলতো, সে অনুপাতটি কত।

[মন্তব্য ঃ অনুপাতের যে পদটি ছোট, অন্তর্বিভক্তের সময় বিভাজনবিন্দু সেই প্রান্তের নিকটবর্তী হবে এবং বহির্বিভক্তের সময় সেই প্রান্তের দিকে বর্ধিত করতে হবে। উপরের উদাহরণে, যেহেতু $3:1$ অনুপাতে বিভক্ত হয়েছে, অন্তর্বিভক্ত করার সময় C বিন্দু B বিন্দুর নিকটবর্তী হয়েছে এবং বহির্বিভক্ত করার সময় D বিন্দু AB-এর বর্ধিতাংশের উপর অবস্থিত হয়েছে। যদি রেখাংশটিকে $1:3$ অনুপাতে বিভক্ত করা হতো, তাহলে C বিন্দু A প্রান্তের নিকটবর্তী হতো এবং D বিন্দু BA-এর বর্ধিতাংশের উপর অবস্থিত হতো।]

একটি প্রয়োজনীয় জ্যামিতিক ধর্ম ঃ

যদি দুটি ত্রিভুজের ভূমি একই সরলরেখায় অবস্থিত হয় এবং ত্রিভুজের অনুরূপ শীর্ষবিন্দু দুটি একই বিন্দু হয়, তাহলে ত্রিভুজ দুটির ক্ষেত্রফলের অনুপাত ভূমির অনুপাতের সমান হবে।



চিত্র নং ঃ 169

ধরা যাক, ΔABC ও ΔADE-এর ভূমি BC ও DE একই সরলরেখা BE-এর উপর অবস্থিত এবং A উভয় ত্রিভুজেরই শীর্ষবিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\frac{\Delta ABC}{\Delta ADE} = \frac{BC}{DE}$.

অঙ্কন ঃ A বিন্দু থেকে BE-এর উপর AP লম্ব অঙ্কন করা হল।

প্রমাণ ঃ $\because$ $AP \perp BE$ এবং একটি বহিঃস্থ বিন্দু থেকে একটি সরলরেখার উপর একটিই লম্ব অঙ্কন করা যেতে পারে,

$\therefore$ $AP \perp BC$ এবং $AP \perp DE$.

$\therefore$ উভয় ত্রিভুজেরই উচ্চতা AP.

$$\therefore \quad \Delta ABC = \frac{1}{2} BC.AP.$$

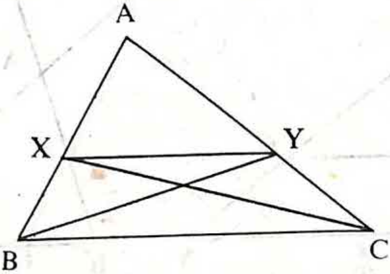
$$\text{এবং } \Delta ADE = \frac{1}{2} DE.AP.$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta ABC}{\Delta ADE} = \frac{\frac{1}{2} BC.AP}{\frac{1}{2} DE.AP}$$

$$= \frac{BC}{DE}.$$

উপপাদ্য 46

যেকোনো ত্রিভুজের কোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অপর দুটি বাহুকে সমানুপাতে বিভক্ত করে।



চিত্র নং ঃ 170

ধরা যাক, ΔABC-এর BC বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা AB ও AC-কে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YC}$.

অঙ্কন ঃ B, Y ও C, X যুক্ত করা হল।

প্রমাণ ঃ ΔAYX এবং ΔBYX-এর ভূমি AX ও XB একই সরলরেখায় অবস্থিত এবং তাদের একই শীর্ষবিন্দু Y,

$$\therefore \quad \frac{\Delta AYX}{\Delta BYX} = \frac{AX}{XB}.$$

আবার, ΔAXY এবং ΔCXY-এর ভূমি AY ও YC একই সরলরেখায় অবস্থিত এবং তাদের একই শীর্ষবিন্দু X,

$$\therefore \quad \frac{\Delta AXY}{\Delta CXY} = \frac{AY}{YC}.$$

$\because$ ΔBYX ও ΔCXY একই ভূমি XY এবং একই সমান্তরাল যুগল XY ও BC-এর মধ্যে অবস্থিত,

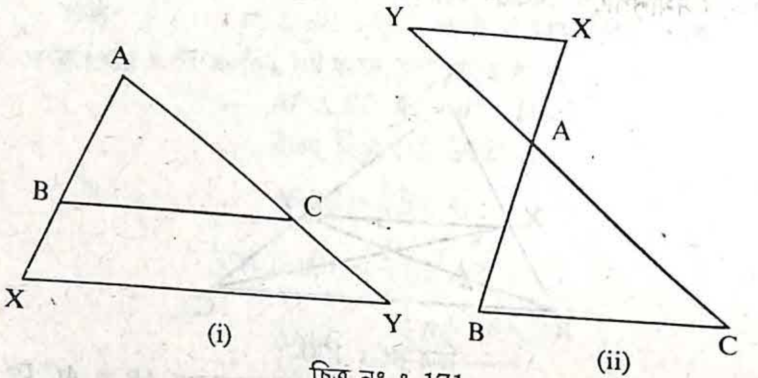
$$\therefore \quad \Delta BYX = \Delta CXY.$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta AYX}{\Delta BYX} = \frac{\Delta AXY}{\Delta CXY}.$$

$$\therefore \quad \frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YC}.$$

[মন্তব্য ঃ (1) 170 নং চিত্রে XY সরলরেখা AB ও AC-কে অন্তর্বিভক্ত করেছে ; XY সরলরেখা AB ও AC-কে বহির্বিভক্ত করতে

পারত {চিত্র নং 171 (*i*)} অথবা *BA* ও *CA*-কেও বহির্বিভক্ত করতে পারত {চিত্র নং 171 (*ii*)}]



চিত্র নং ঃ 171

এই দুটি ক্ষেত্রেও উপপাদ্যটি একই ভাবে প্রমাণ করা যেত । চেষ্টা করে দেখ তো ।

(2) আমরা 170 নং চিত্রে প্রমাণ করেছি, $\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YC}$

এ থেকে আমরা আরও পাই, (*i*) $\frac{AB}{XB} = \frac{AC}{YC}$

এবং (*ii*) $\frac{AB}{AX} = \frac{AC}{AY}$

(*i*) $\because \frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YC}$

$\therefore \frac{AX}{XB} + 1 = \frac{AY}{YC} + 1$

বা, $\frac{AX + XB}{XB} = \frac{AY + YC}{YC}$

বা, $\frac{AB}{XB} = \frac{AC}{YC}$

(*ii*) $\because \frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YC}, \therefore \frac{XB}{AX} = \frac{YC}{AY}$

বা, $1 + \frac{XB}{AX} = 1 + \frac{YC}{AY}$

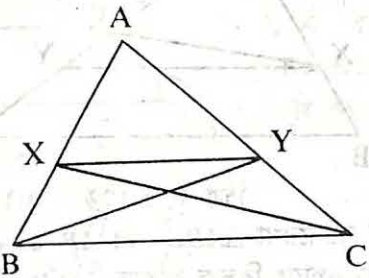
বা, $\frac{AX + XB}{AX} = \frac{AY + YC}{AY}$

$\therefore \frac{AB}{AX} = \frac{AC}{AY}$

(3) এখানে ΔAYX বলতে AYX ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল বোঝানো হয়েছে ।]

উপপাদ্য 47

যে সরলরেখা কোনো ত্রিভুজের দুটি বাহুকে সমানুপাতে বিভক্ত করে, তা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হবে।



চিত্র নং ঃ 172

ধরা যাক, XY সরলরেখা ΔABC-এর AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে সমানুপাতে বিভক্ত করেছে, অর্থাৎ

$$\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YC}.$$

প্রমাণ করতে হবে যে, $XY \parallel BC$.

অঙ্কন ঃ B, Y ও C, X যুক্ত করা হল।

প্রমাণ ঃ ΔAYX ও ΔBYX-এর ভূমি AX ও XB একই সরলরেখায় অবস্থিত এবং তাদের একই শীর্ষবিন্দু Y,

$$\therefore \quad \frac{\Delta AYX}{\Delta BYX} = \frac{AX}{XB}.$$

আবার, ΔAXY ও ΔCXY-এর ভূমি AY ও YC একই সরলরেখায় অবস্থিত এবং তাদের একই শীর্ষবিন্দু X,

$$\therefore \quad \frac{\Delta AXY}{\Delta CXY} = \frac{AY}{YC}.$$

কিন্তু $\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YC}$, (কল্পনানুসারে)

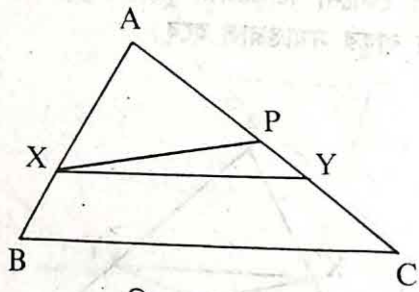
$$\therefore \quad \frac{\Delta AYX}{\Delta BYX} = \frac{\Delta AXY}{\Delta CXY}$$

$$\therefore \quad \Delta BYX = \Delta CXY.$$

কিন্তু ΔBYX ও ΔCXY-এর একই ভূমি XY এবং তারা ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত।

$$\therefore \quad XY \parallel BC$$

বিকল্প প্রমাণ ঃ



চিত্র নং ঃ 173

ধরা যাক, XY সরলরেখা ΔABC–এর AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে সমানুপাতে বিভক্ত করেছে ; অর্থাৎ

$$\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YC}.$$

প্রমাণ করতে হবে যে, $XY \parallel BC$.

প্রমাণ ঃ যদি XY ও BC সমান্তরাল না হয়, তাহলে মনে করি, X বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত BC-এর সমান্তরাল সরলরেখা AC-কে P বিন্দুতে ছেদ করে।

$$\therefore \quad \frac{AX}{XB} = \frac{AP}{PC}$$

কিন্তু $\dfrac{AX}{XB} = \dfrac{AY}{YC}$ (কল্পনানুসারে)

$$\therefore \quad \frac{AP}{PC} = \frac{AY}{YC}$$

$$\therefore \quad \frac{AP}{PC} + 1 = \frac{AY}{YC} + 1$$

বা, $\dfrac{AP + PC}{PC} = \dfrac{AY + YC}{YC}$

বা, $\dfrac{AC}{PC} = \dfrac{AC}{YC}$

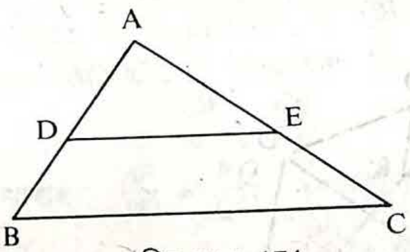
$$\therefore \quad PC = YC.$$

কিন্তু এ অসম্ভব, যদি না P ও Y বিন্দু একই বিন্দু হয়।

$$\therefore \quad XY \parallel BC.$$

[মন্তব্য ঃ এক্ষেত্রেও অন্য রকম দুটি চিত্র হতে পারত।]

কয়েকটি প্রয়োগ ঃ



চিত্র নং ঃ 174

1. ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা AB ও AC-কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। $AE = 2AD$ হলে, $DB : EC$ নির্ণয় কর।

উত্তরঃ $\because \quad DE \parallel BC,$

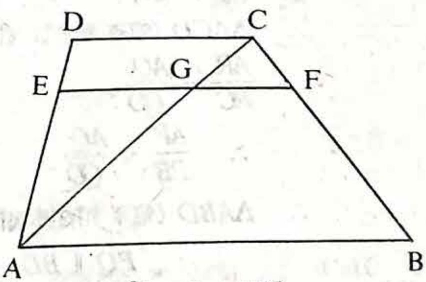
$$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

অর্থাৎ, $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{DB}{EC}$

কিন্তু $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{1}{2} \quad [\because AE = 2AD],$

$$\therefore \quad DB : EC = 1 : 2$$

2. $ABCD$ ট্রাপিজিয়মের $AB \parallel DC$. AB-এর সমান্তরাল একটি সরলরেখা AD ও BC-কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AE : ED = BF : FC$.



চিত্র নং ঃ 175

অঙ্কন ঃ A, C যুক্ত করা হল। AC, EF-কে G বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণঃ ΔADC-এর DC বাহুর সমান্তরাল EG,

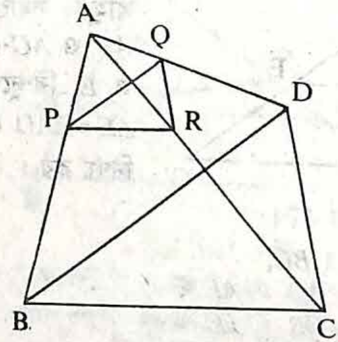
$$\therefore \quad AE : ED = AG : GC.$$

আবার, ΔACB-এর AB বাহুর সমান্তরাল GF,

$$\therefore \quad AG : GC = BF : FC.$$

$$\therefore \quad AE : ED = BF : FC.$$

3. $ABCD$ চতুর্ভুজের দুটি বাহু AB ও AD এবং কর্ণ AC-এর উপর যথাক্রমে P, Q, R বিন্দু তিনটি এমনভাবে নেওয়া হল যে, $PR \parallel BC$ এবং $RQ \parallel CD$. প্রমাণ কর যে, $PQ \parallel BD$.



চিত্র নং ঃ 176

প্রমাণ ঃ $\because$ $PR \parallel BC$,

$\therefore$ ΔABC থেকে পাওয়া যায়

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AR}{RC}.$$

আবার, $\because$ $RQ \parallel CD$,

$\therefore$ ΔACD থেকে পাওয়া যায়

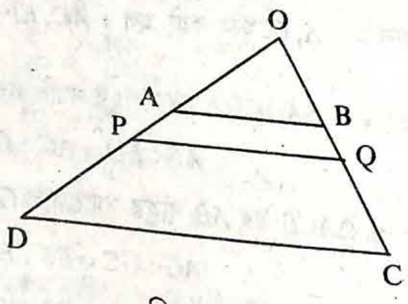
$$\frac{AR}{RC} = \frac{AQ}{QD}.$$

$$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QD}.$$

$\therefore$ ΔABD থেকে পাওয়া যায়

$PQ \parallel BD$.

4. $ABCD$ ট্রাপিজিয়মের $AB \parallel DC$. AD ও BC-এর উপর যথাক্রমে P ও Q এমন দুটি বিন্দু নেওয়া হল যে, $AP : PD = BQ : QC$.
প্রমাণ কর যে, $PQ \parallel DC$.



চিত্র নং ঃ 177

অঙ্কন ঃ ধরা যাক, $AB < DC$. বর্ধিত DA ও CB পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। P, Q যুক্ত করা হল।

প্রমাণ ঃ $\because$ $AB \parallel DC$,

$\therefore$ ΔODC থেকে পাওয়া যায়

$$\frac{OA}{AD} = \frac{OB}{BC}$$

আবার, $\frac{AP}{PD} = \frac{BQ}{QC}$ (কল্পনানুসারে),

$$\therefore \frac{PD}{AP} = \frac{QC}{BQ},$$

অর্থাৎ, $\frac{AP + PD}{AP} = \frac{BQ + QC}{BQ}$,

বা, $\frac{AD}{AP} = \frac{BC}{BQ}$

$$\therefore \frac{OA}{AD} \times \frac{AD}{AP} = \frac{OB}{BC} \times \frac{BC}{BQ},$$

বা, $\frac{OA}{AP} = \frac{OB}{BQ}$.

$\therefore$ ΔOPQ থেকে পাওয়া যায় $AB \parallel PQ$.

কিন্তু $AB \parallel DC$, $\therefore$ $PQ \parallel DC$.

অনুশীলনী 24

1. ΔABC-এর BC বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। (i) $PB = AQ, AP = 9$ একক, $QC = 4$ একক হলে, PB-এর দৈর্ঘ্য কত একক ? (ii) PB-এর দৈর্ঘ্য AP-এর দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ ; QC-এর দৈর্ঘ্য AQ-এর দৈর্ঘ্যের চেয়ে 3 একক বেশি। AC-এর দৈর্ঘ্য কত একক ? (iii) $AP = QC$; AB-এর দৈর্ঘ্য 12 একক এবং AQ-এর দৈর্ঘ্য 2 একক। CQ-এর দৈর্ঘ্য কত একক ?

2. ΔPQR-এর PQ ও PR বাহুর উপর যথাক্রমে X, Y দুটি বিন্দু নেওয়া হল।

(i) $PX = 2$ একক, $XQ = 3{\cdot}5$ একক, $YR = 7$ একক এবং $PY = 4{\cdot}25$ একক হলে, XY ও QR সমান্তরাল হবে কি ? যুক্তি দাও।

(ii) $PQ = 8$ একক, $YR = 12$ একক, $PY = 4$ একক এবং PY-এর দৈর্ঘ্য XQ-এর দৈর্ঘ্যের চেয়ে 2 একক কম হলে, XY ও QR সমান্তরাল হবে কি ? যুক্তি দাও।

3. প্রমাণ কর যে, কোনো ত্রিভুজের একটি বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত দ্বিতীয় বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

4 ΔABC-এর AD মধ্যমার উপর P একটি বিন্দু। বর্ধিত BP ও CP যথাক্রমে AC ও AB-কে Q ও R বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $RQ \parallel BC$.

5. প্রমাণ কর যে, তিনটি সমান্তরাল সরলরেখা দুটি ভেদককে সমানুপাতে বিভক্ত করে।

6. ΔABC-এর BE ও CF মধ্যমা G বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে এবং FE রেখাংশ AG রেখাংশকে O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AO = 3\,OG$.

7. প্রমাণ কর যে, কোনো ট্রাপিজিয়মের তির্যক বাহুগুলির মধ্যবিন্দু দুটির সংযোজক রেখাংশ সমান্তরাল বাহুগুলির সমান্তরাল।

8. প্রমাণ কর যে, কোনো ত্রিভুজের দুটি বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল।

9. ΔABC ও ΔDBC একই ভূমি BC-এর একই পার্শ্বে অবস্থিত। BC-এর উপর অবস্থিত যেকোনো বিন্দু E থেকে BA ও BD-এর সমান্তরাল অঙ্কন করা হল, যা AC ও DC-কে যথাক্রমে F ও G বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AD \parallel FG$.

10. ΔABC-এর BC বাহুর উপর D যেকোনো একটি বিন্দু। P, Q যথাক্রমে ΔABD ও ΔADC-এর ভরকেন্দ্র। প্রমাণ কর যে, $PQ \parallel BC$.

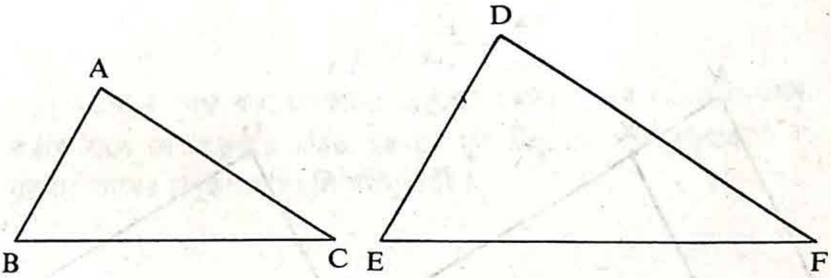
11. OAP, OBQ ও OCR রেখাংশ তিনটির উপর A, P ; B, Q ও C, R বিন্দুগুলি এমনভাবে অবস্থিত যে $AB \parallel PQ$ এবং $BC \parallel QR$. প্রমাণ কর যে, $AC \parallel PR$.

12. ΔPQR ও ΔSQR একই ভূমি QR-এর একই পার্শ্বে অবস্থিত। ত্রিভুজ দুটির ক্ষেত্রফল সমান। F ও G যথাক্রমে ত্রিভুজ দুটির ভরকেন্দ্র ; প্রমাণ কর যে, $FG \parallel QR$.

13. প্রমাণ কর যে, কোনো সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়মের সমান্তরাল বাহু দুটির যেকোন একটির সংলগ্ন কোণ দুটি সমান।

14. প্রমাণ কর যে, কোনো ট্রাপিজিয়মের সমান্তরাল বাহু দুটির যেকোন একটির সংলগ্ন কোণ দুটি সমান হলে, ট্রাপিজিয়মটি সমদ্বিবাহু হবে।

3.1.2. তোমরা জান সদৃশকোণী ত্রিভুজ বলতে আমরা সেরকম দুটি ত্রিভুজকেই বুঝি, যাদের একটির তিনটি কোণ যথাক্রমে অপরটির তিনটি কোণের সমান।



চিত্র নং ঃ 178

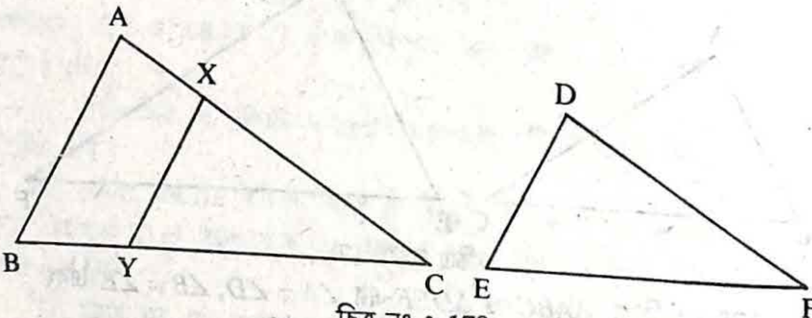
178 নং চিত্রে, ΔABC ও ΔDEF-এর $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$; সুতরাং ΔABC ও ΔDEF সদৃশকোণী।

[মন্তব্য ঃ (1) যেহেতু যেকোনো ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ। সুতরাং একটি ত্রিভুজের দুটি কোণ অপর ত্রিভুজের দুটি কোণের সমান হলে, তৃতীয় কোণ দুটি অবশ্যই সমান হবে ; অর্থাৎ দুটি ত্রিভুজের একটির দুটি কোণ অপরটির দুটি কোণের সমান্ হলেই ত্রিভুজ দুটিকে সদৃশকোণী বলা যাবে।

(2) দুটি সমবাহু ত্রিভুজ অবশ্যই সদৃশকোণী হবে।]

উপপাদ্য 48

যেকোনো দুটি সদৃশকোণী ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী হবে।



চিত্র নং ঃ 179

ধরা যাক, দুটি সদৃশকোণী ত্রিভুজ ΔABC ও ΔDEF-এর $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E, \angle C = \angle F$.

প্রমাণ করতে হবে যে, $\dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD} = \dfrac{AB}{DE}$

অঙ্কন ঃ CA (বা বর্ধিত CA) থেকে FD-এর সমান করে CX অংশ এবং CB (বা বর্ধিত CB) থেকে FE-এর সমান করে CY অংশ কেটে নেওয়া হল। X, Y যুক্ত করা হল।

প্রমাণঃ ΔCXY ও ΔFDE-এর

$CX = FD$ (অঙ্কনানুসারে),

$CY = FE$ (অঙ্কনানুসারে),

অন্তর্ভূত $\angle XCY$ = অন্তর্ভূত $\angle DFE$ (কল্পনানুসারে),

$\therefore \quad \Delta CXY \cong \Delta FDE.$

$\therefore \quad \angle CXY = \angle FDE$ (অনুরূপ কোণ),

$= \angle CAB$ (কল্পনানুসারে)।

$\therefore \quad XY \parallel AB$ ($\because$ $\angle CXY$ ও $\angle CAB$ অনুরূপ কোণ)।

$\therefore \quad \dfrac{CB}{CY} = \dfrac{CA}{CX}$;

অর্থাৎ $\dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD}$

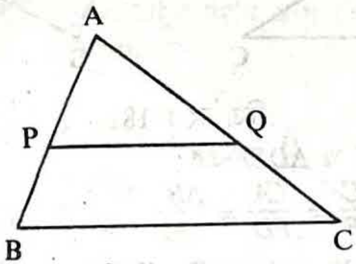
($\because$ $CY = FE,\ CX = FD$).

অনুরূপভাবে, AB (বা বর্ধিত AB) থেকে DE-এর সমান অংশ এবং AC (বা বর্ধিত AC) থেকে DF-এর সমান অংশ কেটে নিয়ে বিভাজন বিন্দু দুটি যুক্ত করে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\frac{CA}{FD} = \frac{AB}{DE}$$

$$\therefore \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{AB}{DE}$$

[**মন্তব্য ঃ** লক্ষ কর, যেকোনো ত্রিভুজের কোনো বাহুর সমান্তরাল অঙ্কন করার ফলে যে ত্রিভুজটি গঠিত হয় তা মূল ত্রিভুজের সঙ্গে সদৃশকোণী । সুতরাং তাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী ।



চিত্র নং ঃ 180

180 নং চিত্রে, $PQ \parallel BC$.

$\therefore$ ΔAPQ ও ΔABC-এর

$\angle APQ =$ অনুরূপ $\angle ABC$,

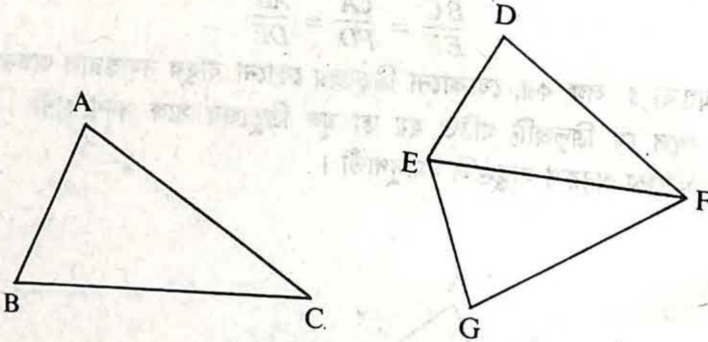
$\angle AQP =$ অনুরূপ $\angle ACB$,

$\therefore$ ΔAPQ ও ΔABC সদৃশকোণী ।

$$\therefore \frac{AQ}{AC} = \frac{AP}{AB} = \frac{PQ}{BC}.$$]

উপপাদ্য 49

যদি যেকোনো দুটি ত্রিভুজের বাহুগুলি সমানুপাতী হয়, তাহলে ত্রিভুজ দুটির অনুরূপ কোণগুলি সমান হবে, অর্থাৎ ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী হবে।



চিত্র নং ঃ 181

ধরা যাক, ΔABC ও ΔDEF-এর

$$\frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{AB}{DE}.$$

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$

অর্থাৎ ΔABC ও ΔDEF সদৃশকোণী।

অঙ্কন ঃ EF-কে বাহু করে EFG এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করা হল যে, G বিন্দু D বিন্দুর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হয় এবং $\angle GEF = \angle ABC$ ও $\angle GFE = \angle ACB$.

প্রমাণ ঃ ΔABC ও ΔGEF-এর

$\angle ABC = \angle GEF$ (অঙ্কনানুসারে),

$\angle ACB = \angle GFE$ (অঙ্কনানুসারে),

ΔABC ও ΔGEF সদৃশকোণী।

$$\therefore \frac{CA}{FG} = \frac{AB}{GE} = \frac{BC}{EF}$$

$\therefore \frac{CA}{FG} = \frac{CA}{FD}$ ($\because$ প্রত্যেকেই $\frac{BC}{EF}$ এর সমান)।

$\therefore FG = FD.$

অনুরূপভাবে, $GE = DE.$

আবার, ΔDEF ও ΔGEF-এর

$$DE = GE \text{ (প্রমাণিত).}$$
$$DF = GF \text{ (প্রমাণিত).}$$

এবং EF সাধারণ ।

$\therefore \quad \Delta DEF \cong \Delta GEF.$

$\therefore \quad \angle EDF = \angle EGF = \angle BAC,$

$\angle DEF = \angle GEF = \angle ABC,$

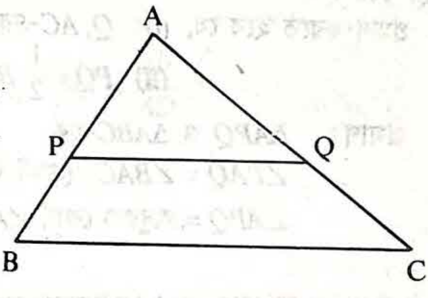
এবং $\angle DEF = \angle GFE = \angle ACB$;

অর্থাৎ $\angle A = \angle D,\ \angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F.$

$\therefore$ ΔABC ও ΔDEF সদৃশকোণী ।

[মন্তব্য ঃ (1) উপপাদ্য 48-এর প্রমাণের মতই ΔABC-এর দুটি বাহু থেকে ΔDEF-এর দুটি অনুরূপ বাহুর সমান অংশ কেটে নিয়েও উপপাদ্য 49 প্রমাণ করা যেত । চেষ্টা করে দেখতো ।

(2) যেকোনো ত্রিভুজের দুটি বাহু যদি সমানুপাতে বিভক্ত হয়, তাহলে বিভাজন বিন্দু দুটি যুক্ত করে যে ত্রিভুজটি পাওয়া যায়, তা মূল ত্রিভুজের সহিত সদৃশকোণী হবে ; অর্থাৎ, 182 নং চিত্রে, ΔAPQ ও ΔABC সদৃশকোণী ।



চিত্র নং ঃ 182

$\because \quad \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QC},$

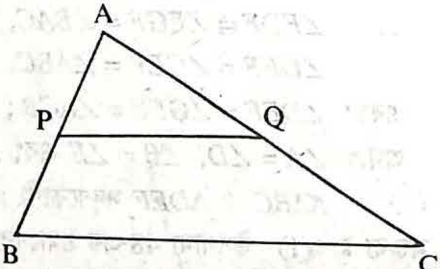
$\therefore \quad PQ \parallel BC.$

$\therefore$ ΔAPQ ও ΔABC সদৃশকোণী ।

এটাও লক্ষ কর, $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AQ}{AC} = \dfrac{PQ}{BC}$ হবে ।]

কয়েকটি প্রয়োগ ঃ

1. প্রমাণ কর যে, যেকোনো ত্রিভুজের কোনো একটি বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অপর একটি বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন করলে তা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে এবং সেই সমান্তরাল সরলরেখাটির খণ্ডিতাংশ দ্বিতীয় বাহুর অর্ধেক হবে।



চিত্র নং ঃ 183

ধরা যাক, ΔABC-এর AB বাহুর মধ্যবিন্দু P দিয়ে BC-এর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন করা হল, যা AC-কে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে, (i) Q, AC-এর মধ্যবিন্দু।

(ii) $PQ = \frac{1}{2} BC$.

প্রমাণ ঃ ΔAPQ ও ΔABC-এর

$\angle PAQ = \angle BAC$ (একই কোণ),

$\angle APQ =$ অনুরূপ কোণ $\angle ABC$ ($\because PQ \parallel BC$ এবং APB ভেদক)।

$\therefore$ ΔAPQ ও ΔABC সদৃশকোণী।

$$\therefore \frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}.$$

কিন্তু $\frac{AP}{AB} = \frac{1}{2}$ ($\because$ P, AB-এর মধ্যবিন্দু)।

$\therefore$ $\frac{AQ}{AC} = \frac{1}{2}$;

অর্থাৎ $AQ = \frac{1}{2} AC$.

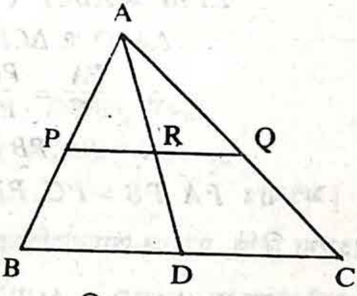
$\therefore$ Q, AC-এর মধ্যবিন্দু ....(i)

এবং $\frac{QP}{BC} = \frac{1}{2}$,

$\therefore$ $PQ = \frac{1}{2} BC$. ....(ii)

[লক্ষ কর, উপপাদ্য 23 এখানে অন্যভাবে প্রমাণ করা হল।]

2. ΔABC-এর AD একটি মধ্যমা। BC-এর সমান্তরাল কোনো সরলরেখা AB ও AC-কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, AD দ্বারা PQ রেখাংশ সমদ্বিখণ্ডিত হবে।



চিত্র নং ঃ 184

ধরা যাক, PQ, AD-কে R বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে,

$$PR = RQ.$$

প্রমাণ ঃ ΔAPR ও ΔABD- এর $\angle PAR = \angle BAD$ (একই কোণ),

$\angle APR =$ অনুরূপ $\angle ABD$ ($\because$ $PR \parallel BD$ এবং APB ভেদক),

$\therefore$ ΔAPR ও ΔABD সদৃশকোণী।

$$\therefore \frac{PR}{BD} = \frac{AR}{AD}$$

অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায় যে, $\frac{RQ}{DC} = \frac{AR}{AD}$.

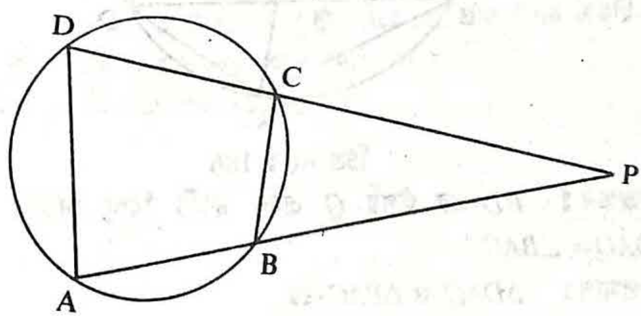
$$\therefore \frac{PR}{BD} = \frac{RQ}{DC}$$

কিন্তু $BD = DC$ [$\because$ AD মধ্যমা],

$$\therefore PR = RQ.$$

3. $ABCD$ একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। বর্ধিত AB ও DC পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ কর যে,

$$PA.PB = PC.PD.$$



চিত্র নং ঃ 185

প্রমাণঃ ΔAPD ও ΔCPB-এর

$\angle APD = \angle CPB$ (একই কোণ),

$\angle PAD = \angle BCP$ ($\because$ $ABCD$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ),

$\therefore$ ΔAPD ও ΔCPB সদৃশকোণী।

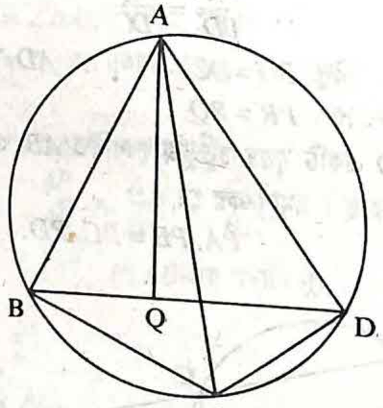
$$\therefore \quad \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}.$$

$$\therefore \quad PA.PB = PC.PD.$$

[মন্তব্যঃ $PA.PB = PC.PD$ সম্পর্কটি যদি আমরা অনুপাতের সাহায্যে লিখি, তাহলে আমরা লিখতে পারি $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$. এখান থেকেই বোঝা যাচ্ছে যে, ΔAPD ও ΔCPB সদৃশকোণী দেখাতে পারলেই যা প্রমাণ করতে বলা হয়েছে, আমরা তা প্রমাণ করতে পারব।

আবার, যেহেতু PA বাহুর অনুরূপ বাহু PC এবং PD বাহুর অনুরূপ বাহু PB হতে হবে, সেখান থেকেই আমরা বুঝতে পারব কোন কোণের সঙ্গে কোন কোণ সমান দেখানোর চেষ্টা করতে হবে।]

4. $ABCD$ একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। প্রমাণ কর যে,
$AC.BD = AB.DC + AD.BC.$



চিত্র নং ঃ 186

অঙ্কনঃ BD-এর উপর Q এমন একটি বিন্দু নেওয়া হল, যেন $\angle DAQ = \angle BAC.$

প্রমাণঃ ΔDAQ ও ΔBAC-এর

$\angle DAQ = \angle BAC$ (অঙ্কনানুসারে),

$\angle ADQ = \angle ACB$ (একই বৃত্তাংশস্থ কোণ),

$\therefore$ ΔDAQ ও ΔBAC সদৃশকোণী।

$\therefore \quad \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{DQ}{BC}$

$\therefore \quad AC.\,DQ = AD.\,BC$

$\because \quad \angle BAC = \angle DAQ$ (অঙ্কনানুসারে),

$\therefore \quad \angle BAC - \angle CAQ = \angle DAQ - \angle CAQ.$

$\therefore \quad \angle BAQ = \angle DAC.$

এবার ΔBAQ ও ΔCAD-এর

$\angle BAQ = \angle DAC,$

$\angle ABQ = \angle ACD$ (একই বৃত্তাংশস্থ কোণ),

$\therefore$ ΔBAQ ও ΔCAD সদৃশকোণী।

$\therefore \quad \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BQ}{DC}.$

$\therefore \quad AC.\,BQ = AB.\,DC.$

$\therefore \quad AC.\,BQ + AC.\,DQ = AB.\,DC + AC.\,DB.$

$\therefore \quad AC.\,(BQ + DQ) = AB.DC + AC.DB.$

$\therefore \quad AC.\,BD = AB.DC + AC.DB.$

[মন্তব্য : যেহেতু $AC.\,BD = AB.\,DC + AC.\,BD$ দেখাতে হবে, সেজন্য BD-এর উপর একটি বিন্দু Q নিয়ে BD-কে দুটি অংশে বিভক্ত করা হল, যাতে $AC.\,BD = AC.\,BQ + AC.\,DQ$ পাওয়া যায়। এবার যেকোনো একটিকে $AC.\,DC$ বা $AC.\,DB$-এর সমান দেখানোর চেষ্টা করতে হবে, অর্থাৎ দুটি সদৃশকোণী ত্রিভুজ পাওয়ার চেষ্টা করতে হবে। সেই উদ্দেশ্য মনে রেখেই Q বিন্দুর অবস্থান ঠিক করতে হবে।

এভাবে BD-এর উপর Q বিন্দু না নিয়ে AC-এর উপর একটি বিন্দু নিয়েও প্রমাণ করা যেত। চেষ্টা করে দেখ তো।

এটিকে টলেমির উপপাদ্য বলা হয়।]

অনুশীলনী 25

1. প্রমাণ কর যে, যেকোনো ত্রিভুজের দুটি বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক হবে।

2. তিনটি সমবিন্দু সরলরেখাকে দুটি সমান্তরাল সরলরেখা যথাক্রমে A, B, C ও X, Y, Z বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ কর যে, $AB : BC = XY : YZ$.

3. $PQRS$ একটি ট্রাপিজিয়ম, যার $PQ \parallel SR$. PR ও QS কর্ণ দুটি O বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করেছে। প্রমাণ কর যে, $OP : OR \parallel OQ : OS$. যদি $SR = 2PQ$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, O বিন্দু কর্ণ দুটির প্রত্যেকটির সমত্রিখণ্ডক বিন্দুর একটি বিন্দু হবে।

4. $PQRS$ একটি সামান্তরিক। S বিন্দুগামী একটি সরলরেখা PQ এবং বর্ধিত RQ-কে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $PS : PX = QY : QX = RY : RS$.

5. ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ, যার প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য a একক। BC-কে P বিন্দু পর্যন্ত এবং CB-কে Q বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যে, $BQ = CP = a$ হয়। A, P ও A, Q যুক্ত করে প্রমাণ কর যে,

(i) $PQ : PA = PA : PC$, (ii) $PA^2 = 3a^2$

6. দুটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ ΔABC ও ΔPQR সদৃশকোণী। তাদের পরিকেন্দ্র যথাক্রমে X ও Y. BC ও QR অনুরূপ বাহু হলে, প্রমাণ কর যে,

$$BX : QY = BC : QR.$$

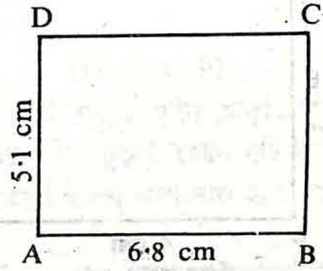
7. কোন বৃত্তের PQ ও RS দুটি জ্যা বৃত্তের অভ্যন্তরে X বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করেছে। P, S ও R, Q যুক্ত করে প্রমাণ কর যে, ΔPXS ও ΔRXQ সদৃশকোণী। এ থেকে প্রমাণ কর যে, $PX . XQ = RX . XS$.

3.2. সদৃশ ত্রিভুজ ও কয়েকটি সদৃশ সামতলিক চিত্রের ধারণা ঃ

অনুপাত ও সমানুপাত নিয়ে আলোচনার সময় তোমরা দেখেছ যে, একটি দেওয়াল মানচিত্র ও একটি খসড়া মানচিত্রের আকৃতি একই রকম হয়, কিন্তু আকারে ছোট-বড় হয় । ঐ দুটি মানচিত্রের যেকোনো দুটি অনুরূপ বিন্দুর মধ্যে দূরত্বের অনুপাত সব সময়ে একই থাকবে ।

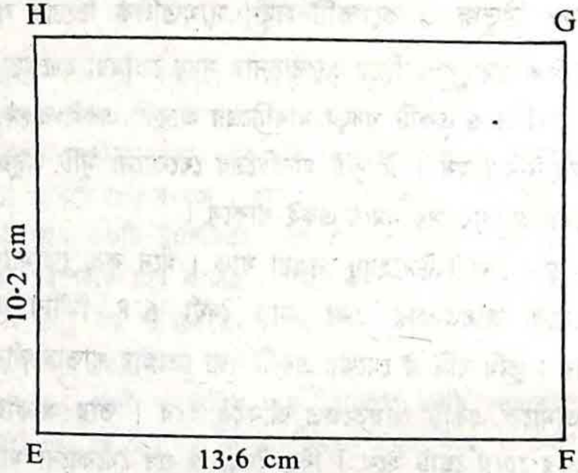
এবার আর একটি উদাহরণ নেওয়া যাক । মনে কর, তোমাদের শ্রেণী-কক্ষের মেঝে আয়তাকার এবং তার দৈর্ঘ্য 6·8 মিটার এবং প্রস্থ 5·1 মিটার । তুমি যদি ঐ মেঝের একটি নক্সা তোমার খাতায় আঁকতে চাও, তাহলে তোমাকে একটি আয়তক্ষেত্র আঁকতে হবে । তার আকার নিশ্চয়ই ঘরের মেঝের চেয়ে ছোট হবে । কিন্তু দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যেকোনো মাপেই নিলে হবে কি ? নিশ্চয়ই নয় ।

তুমি যে আয়তক্ষেত্রটি আঁকবে, তার দৈর্ঘ্য যদি 6·8 সেমি নাও, তাহলে প্রস্থ 5·1 সেমি নিতে হবে (চিত্র নং 187) ।



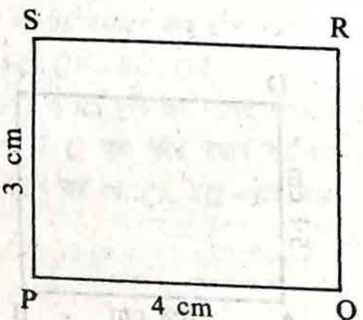
চিত্র নং ঃ 187

তুমি যে কাগজে এঁকেছ, আর একজন যদি তার চেয়ে বড় মাপের কাগজে নক্সাটি আঁকে, তাহলে সে কিন্তু আরও বড় আকারের আয়তক্ষেত্র আঁকতে পারবে । সে যদি দৈর্ঘ্য 13·6 সেমি নেয়, তাহলে তাকে প্রস্থ 10·2 সেমি নিতে হবে । (পরের পৃষ্ঠার চিত্র নং 188 দেখ ।)



চিত্র নং ঃ 188

আবার, কেউ যদি তোমার চেয়ে ছোট করে নক্সাটি আঁকতে চায়, তাহলে তার আঁকা আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ ছোট মাপের হবে, কিন্তু দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের মধ্যে সম্পর্কটি কিন্তু পূর্বের মতই হবে ; অর্থাৎ, সে যদি দৈর্ঘ্য 4 সেমি নেয়, তাহলে তাকে প্রস্থ নিতে হবে 3 সেমি ।

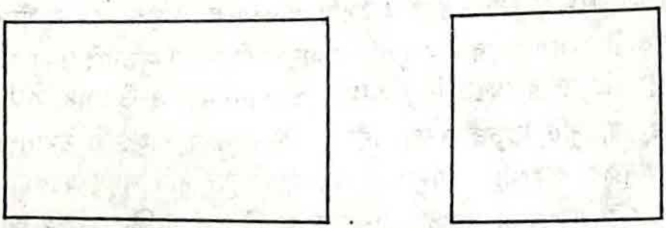


চিত্র নং ঃ 189

তাহলে দেখ, এই তিনটি নক্সা একই আকৃতির হল, অর্থাৎ তিনটিই হল আয়তক্ষেত্র । তিনটি চিত্রেরই কোণগুলি সমান হল (প্রত্যেকেই সমকোণ) এবং অনুরূপ বাহুগুলির অনুপাতও সমান হল, তার অর্থ হল অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী । এরূপ চিত্রকে আমরা বলি সদৃশ চিত্র । তাহলে আমরা সদৃশ বহুভুজের সংজ্ঞা নিম্নলিখিতরূপে দিতে পারি ।

সংজ্ঞাঃ যে বহুভুজগুলি সদৃশকোণী (অর্থাৎ তাদের কোণগুলি সমান) এবং যাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী, তারা সদৃশ ।

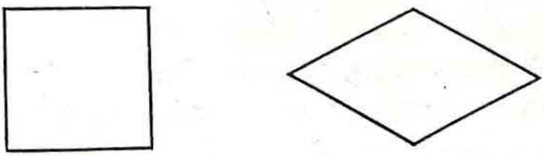
[মন্তব্য ঃ (1) দুটি বহুভুজ সদৃশ কিনা বিচার করার জন্য এই দুটি শর্ত পালিত হল কিনা তা দেখতে হবে। যেমন (*i*) একটি বর্গক্ষেত্র ও একটি



চিত্র নং ঃ 190

আয়তক্ষেত্র সদৃশকোণী, কিন্তু তাদের অনুরূপ বাহুগুলি কখনই সমানুপাতী হবে না। কাজেই তারা সদৃশ নয়।

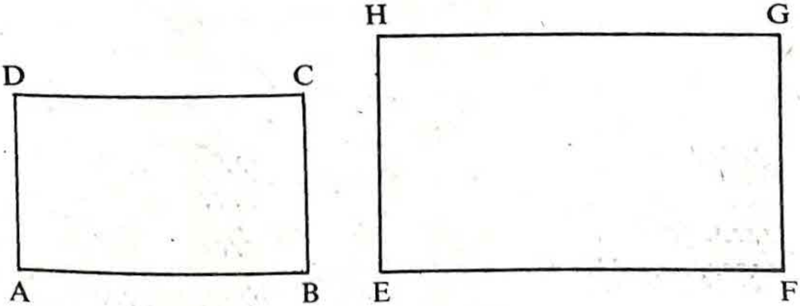
(*ii*) একটি বর্গক্ষেত্র ও একটি রম্বসের অনুরূপ বাহুগুলি সর্বদাই সমানুপাতী হবে, কিন্তু তারা কখনই সদৃশকোণী নয় (কারণ, বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ, কিন্তু রম্বসের একটি কোণও সমকোণ নয়), কাজেই এরা সদৃশ নয়।



চিত্র নং ঃ 191

লক্ষ কর, এই দুটি ক্ষেত্রেই চতুর্ভুজ দুটির আকৃতি আলাদা।

(*iii*) একই আকৃতির দুটি চতুর্ভুজ, যেমন দুটি আয়তক্ষেত্র, যদি নেওয়া হয়, তাহলে তারা সদৃশকোণী হলেও সদৃশ নাও হতে পারে।



চিত্র নং ঃ 192

মনে করি, $ABCD$ আয়তক্ষেত্রের AB ও AD বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 5 সেমি এবং 3 সেমি। আবার, $EFGH$ আয়তক্ষেত্রের EF ও EH বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 7 সেমি এবং 4 সেমি। তাহলে স্পষ্টতই দেখা যাচ্ছে, তারা সদৃশকোণী হলেও অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী নয়। সুতরাং এরা সদৃশ নয়।

(2) ত্রিভুজের ক্ষেত্রে কিন্তু আমরা উপপাদ্য 48 ও উপপাদ্য 49-এ প্রমাণ করেছি যে, দুটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলেই অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী হবে এবং অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী হলেই ত্রিভুজ দুটি সদৃশ হবে। কাজেই, ত্রিভুজের ক্ষেত্রে দেখা যাচ্ছে, সদৃশতার একটি শর্ত পালিত হলেই আর একটি শর্তও পালিত হচ্ছে।

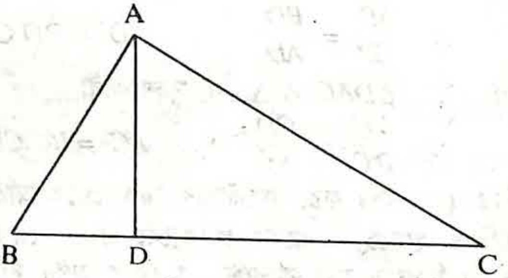
তাই আমরা ত্রিভুজের ক্ষেত্রে বলতে পারি,

(*i*) দুটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলেই ত্রিভুজ দুটি সদৃশ হবে,

অথবা (*ii*) দুটি ত্রিভুজের বাহুগুলি সমানুপাতী হলেই ত্রিভুজ দুটি সদৃশ হবে।]

উপপাদ্য 50

যেকোনো সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু থেকে অতিভুজের উপর লম্ব অঙ্কন করলে যে দুটি ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তাদের প্রত্যেকটি মূল ত্রিভুজের সঙ্গে সদৃশ এবং তারা নিজেরাও পরস্পর সদৃশ।



চিত্র নং ঃ 193

ধরা যাক, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার $\angle A$ সমকোণ এবং সমকৌণিক বিন্দু A-থেকে অতিভুজ BC-এর উপর AD লম্ব।

প্রমাণ করতে হবে যে, (i) ΔDBA ও ΔABC পরস্পর সদৃশ।
(ii) ΔDAC ও ΔABC পরস্পর সদৃশ।
(iii) ΔDBA ও ΔDAC পরস্পর সদৃশ।

প্রমাণ ঃ $\angle BDA = \angle BAC = \angle ADC$ (প্রত্যেকেই সমকোণ),

$\therefore$ $\angle BAD = \angle BCA = \angle ACD$ ($\angle ABC$ বা $\angle ABD$ -এর পূরক কোণ),

এবং $\angle ABD = \angle CBA = \angle CAD$ ($\angle ACB$ বা $\angle ACD$-এর পূরক কোণ)।

প্রথম ও দ্বিতীয় সম্পর্ক থেকে আমরা পাই,
ΔDBA ও ΔABC সদৃশকোণী।
$\therefore$ ΔDBA ও ΔABC পরস্পর সদৃশ। ....(i)

দ্বিতীয় ও তৃতীয় সম্পর্ক থেকে আমরা পাই,
ΔABC ও ΔDAC সদৃশকোণী।
$\therefore$ ΔABC ও ΔDAC পরস্পর সদৃশ। ....(ii)

এবং প্রথম ও তৃতীয় সম্পর্ক থেকে আমরা পাই,
ΔDBA ও ΔDAC সদৃশকোণী।
$\therefore$ ΔDBA ও ΔDAC পরস্পর সদৃশ। ....(iii)

অনুসিদ্ধান্ত ঃ 1. 193 নং চিত্র থেকে আমরা পাই,

(i) $AB^2 = BC.BD$. (ii) $AD^2 = BD.CD$. (iii) $AC^2 = BC.CD$.

(i) $\because$ ΔDBA ও ΔABC সদৃশকোণী,

$\therefore \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BD}{AB}$. $\therefore AB^2 = BC.BD$.

(ii) $\because$ ΔDBA ও ΔDAC সদৃশকোণী,

$\therefore \dfrac{AD}{CD} = \dfrac{BD}{AD}$ $\therefore AD^2 = BD.CD$.

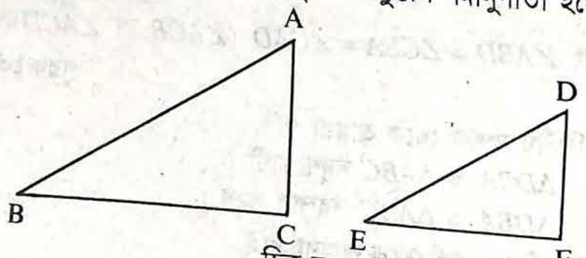
(iii) $\because$ ΔDAC ও ΔABC সদৃশকোণী,

$\therefore \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{CD}{AC}$ $\therefore AC^2 = BC.CD$.

[মন্তব্য ঃ (1) লক্ষ কর, সমকৌণিক বিন্দু থেকে অতিভুজ পর্যন্ত তিনটি রেখাংশ অঙ্কিত হয়েছে। এদের যেকোনো একটি রেখাংশ, ঐ রেখাংশ অতিভুজকে যে বিন্দুতে ছেদ করেছে, তা থেকে অপর দুটি ছেদবিন্দু পর্যন্ত উৎপন্ন রেখাংশ দুটির মধ্য-সমানুপাতী।

(2) অনুসিদ্ধান্ত তিনটি থেকে আমরা পাচ্ছি AB, AD ও AC যথাক্রমে BC, BD ; BD, CD ও BC, CD-এর মধ্য-সমানুপাতী ; অর্থাৎ AB, AD ও AC বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল যথাক্রমে BC ও BD বাহুবিশিষ্ট আয়তক্ষেত্র, BD ও CD বাহুবিশিষ্ট আয়তক্ষেত্র এবং BC ও CD বাহুবিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হবে।]

2. যেকোনো দুটি সমকোণী ত্রিভুজের দুটির একটি সূক্ষ্মকোণ যদি সমান হয়, তাহলে অপর সূক্ষ্মকোণ দুটিও সমান হবে, অর্থাৎ ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী হবে। সুতরাং এই ত্রিভুজ দুটির অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী হবে।



চিত্র নং ঃ 194

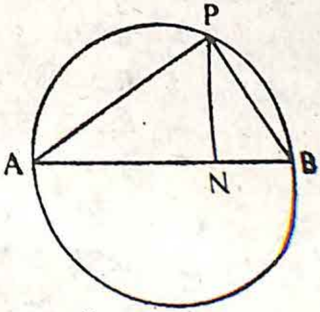
194 নং চিত্রে, মনে করি, সমকোণী ΔABC ও ΔDEF-এর $\angle C$ ও $\angle F$ সমকোণ এবং $\angle B$ ও $\angle E$ পরস্পর সমান। সুতরাং $\angle A = \angle D$.

$\therefore$ ΔABC ও ΔDEF সদৃশকোণী।

$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$$

কয়েকটি প্রয়োগঃ

1. কোনো বৃত্তের AB একটি ব্যাস। বৃত্তের উপরিস্থিত কোনো বিন্দু P থেকে AB-এর উপর অঙ্কিত লম্ব AB-কে N বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $PB^2 = AB.BN$.



চিত্র নং ঃ 195

প্রমাণঃ $\because$ AB ব্যাস,

$\therefore$ $\angle APB$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

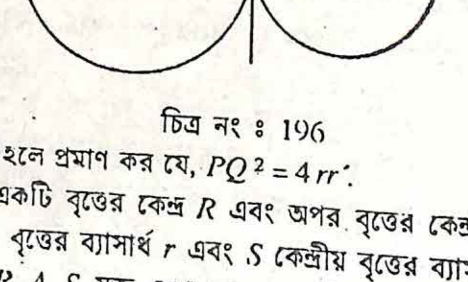
$\therefore$ $\angle APB = 1$ সমকোণ।

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ APB-এর সমকৌণিক বিন্দু P থেকে অতিভুজ AB-এর উপর PN লম্ব।

$\therefore$ ΔABP ও ΔPBN সদৃশ।

$\therefore$ $\dfrac{PB}{NB} = \dfrac{AB}{PB}$ $\quad\therefore$ $PB^2 = AB.BN$.

2. দুটি বৃত্ত পরস্পরকে A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। PQ ওই দুটি বৃত্তের একটি সরল সাধারণ স্পর্শক। যদি বৃত্ত দুটির ব্যাসার্ধ যথাক্রমে



চিত্র নং ঃ 196

r ও r' হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $PQ^2 = 4rr'$.

ধরা যাক, একটি বৃত্তের কেন্দ্র R এবং অপর বৃত্তের কেন্দ্র S. আরও ধরা যাক, R-কেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এবং S কেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ r'.

অঙ্কন ঃ R, A, S যুক্ত করা হল। A বিন্দুতে সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন করা হল, যা PQ-কে B বিন্দুতে ছেদ করে। B, R ও B, S যুক্ত করা হল।

প্রমাণঃ B বিন্দু থেকে R-কেন্দ্রীয় বৃত্তে BP ও BA স্পর্শক

$\therefore$ $PB = AB$ এবং BR, $\angle ABP$-এর সমদ্বিখণ্ডক।

অনুরূপভাবে, $BQ = AB$ এবং BS, $\angle ABQ$-এর সমদ্বিখণ্ডক।

$\therefore$ $\angle RBS = 1$ সমকোণ।

$\because$ R, S দুটি বৃত্তের কেন্দ্র, A স্পর্শবিন্দু ;

$\therefore$ R, A, S সমরেখ এবং $AB \perp RS$.

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ RBS-এর সমকৌণিক বিন্দু B থেকে BA, অতিভুজ RS-এর উপর লম্ব।

$\therefore$ ΔABR ও ΔASB সদৃশ।

$$\therefore \frac{AB}{AS} = \frac{AR}{AB} \quad \therefore \quad AB^2 = AR.AS$$

$$= rr' \quad (\because \; AR = r, AS = r').$$

$$\therefore 4AB^2 = 4rr', \quad \text{বা,} \quad (2AB)^2 = 4rr',$$

$$\text{বা,} \quad PQ^2 = 4rr' \quad (\because \; PQ = PB + BQ = 2AB).$$

অনুশীলনী 26

1. কোনো বৃত্তের AB একটি ব্যাস। A বিন্দুগামী কোনো সরলরেখা বৃত্তকে C বিন্দুতে এবং B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শককে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, (i) $BD^2 = AD.DC$, (ii) যেকোনো সরলরেখার জন্যই AC ও AD বাহু দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একই থাকবে।

2. O-কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের AB একটি ব্যাস। P বৃত্তের উপর যেকোনো একটি বিন্দু। A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটিকে P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি যথাক্রমে Q ও R বিন্দুতে ছেদ করে। যদি বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $PQ.PR = r^2$.

3. AB-কে ব্যাস করে একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করা হয়েছে। AB-এর উপর C যেকোনো একটি বিন্দু। C থেকে AB-এর উপর লম্ব অঙ্কন করা হয়েছে, যা অর্ধবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, CD, AC ও BC-এর মধ্য-সমানুপাতী।

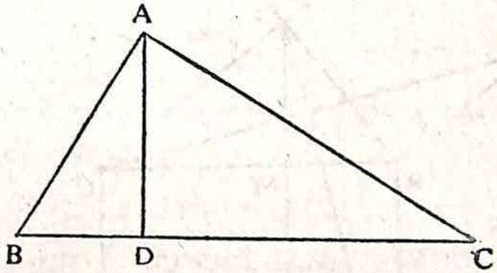
4. সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর $\angle A$ সমকোণ। অতিভুজ BC-এর উপর AD লম্ব। প্রমাণ কর যে,

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta ACD} = \frac{BC^2}{AC^2}$$

পীথাগোরাস উপপাদ্য ও তার বিপরীত উপপাদ্য ঃ

উপপাদ্য 51

যেকোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান হবে।



চিত্র নং ঃ 197

ধরা যাক, ΔABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার $\angle A$ সমকোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

অঙ্কন ঃ সমকৌণিক বিন্দু A থেকে অতিভুজ BC-এর উপর AD লম্ব অঙ্কন করা হল।

প্রমাণ ঃ $\because$ সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর অতিভুজ BC-এর উপর AD লম্ব,

$\therefore \Delta ABD$ ও ΔCBA সদৃশ,

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB}$$

$$\therefore AB^2 = BC.BD$$

আবার, ΔACD ও ΔCBA সদৃশ।

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC}$$

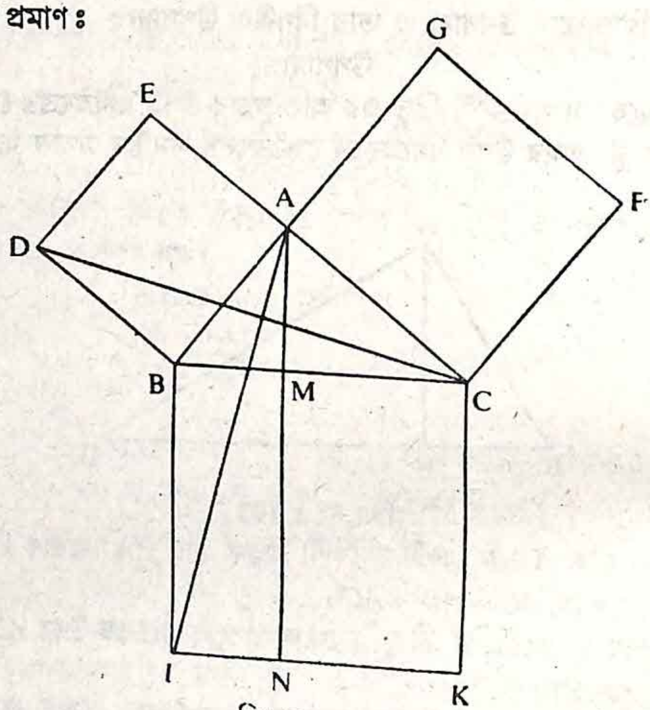
$$\therefore AC^2 = BC.DC$$

$$\therefore AB^2 + AC^2 = BC.BD + BC.DC$$

$$= BC\,(BD + DC) = BC^2$$

$$\therefore BC^2 = AB^2 + AC^2$$

বিকল্প প্রমাণ ঃ



চিত্র নং ঃ 198

ধরা যাক, ΔABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার $\angle A$ সমকোণ।
প্রমাণ করতে হবে যে, $BC^2 = AB^2 + AC^2$

অঙ্কন ঃ BC, AB ও AC-কে বাহু করে যথাক্রমে $BCKL$, $ABDE$ ও $ACFG$ বর্গক্ষেত্রগুলি অঙ্কন করা হল। A বিন্দু থেকে BL-এর সমান্তরাল অঙ্কন করা হল যা, BC ও LK-কে যথাক্রমে M ও N বিন্দুতে ছেদ করে। D, C ও A, L যুক্ত করা হল।

প্রমাণ ঃ $\because BL \parallel AN$,

$\therefore AN$, BC ও LK-এর উপর লম্ব,

অর্থাৎ $BLNM$ এবং $MNKC$ চতুর্ভুজ দুটির প্রত্যেকে আয়তক্ষেত্র।

$\because \angle BAE$ ও $\angle BAC$-এর প্রত্যেকেই 1 সমকোণ,

$\therefore C, A, E$ সমরেখ।

অনুরূপভাবে B, A, G সমরেখ।

আবার, $\angle DBA = \angle CBL$ (প্রত্যেকে 90°)

$\therefore \angle DBA + \angle ABC = \angle CBL + \angle ABC$

$= \angle ABC + \angle CBL$

$\therefore \angle DBC = \angle ABL$

এবার ΔDBC ও ΔABL-এর

$DB = AB$ (একই বর্গক্ষেত্রের বাহু),

$BC = BL$ (একই বর্গক্ষেত্রের বাহু),

অন্তর্ভূত $\angle DBC$ = অন্তর্ভূত $\angle ABL$ (প্রমাণিত),

$\therefore \Delta DBC \cong \Delta ABL$

$\therefore \Delta DBC = \Delta ABL$

$\because \Delta DBC$ ও বর্গক্ষেত্র $ABDE$ একই ভূমি DB ও একই সমান্তরাল যুগল DB ও EC-এর মধ্যে অবস্থিত,

$\therefore \quad \Delta DBC = \frac{1}{2}$ বর্গক্ষেত্র $ABDE$.

আবার, ΔABL ও আয়তক্ষেত্র $BLNM$ একই ভূমি BL ও একই সমান্তরাল যুগল BL ও AN-এর মধ্যে অবস্থিত,

$\therefore \quad \Delta ABL = \frac{1}{2}$ আয়তক্ষেত্র $BLNM$.

$\because \quad \Delta DBC = \Delta ABL$.

$\therefore$ বর্গক্ষেত্র $ABDE$ = আয়তক্ষেত্র $BLNM$.

অনুরূপভাবে, B, F ও A, K যুক্ত করে প্রমাণ করা যাবে

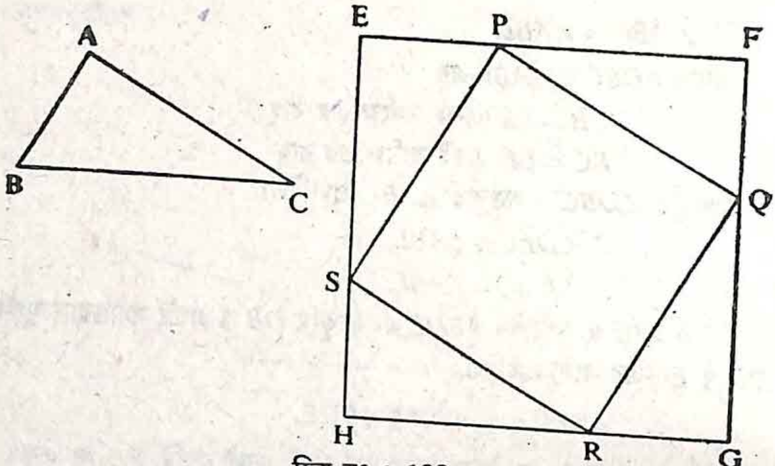
বর্গক্ষেত্র $ACFG$ = আয়তক্ষেত্র $MNKC$.

$\therefore$ বর্গক্ষেত্র $ABDE$ + বর্গক্ষেত্র $ACFG$ = আয়তক্ষেত্র $BLNM$ + আয়তক্ষেত্র $MNKC$ = বর্গক্ষেত্র $BCKL$.

$\therefore \quad BC^2 = AB^2 + AC^2$.

[মন্তব্য : (1) বিকল্প প্রমাণটি ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত ধর্ম ব্যবহার করে করা হল।

(2) তোমরা $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ এবং $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$-এই বীজগাণিতিক সূত্রগুলি সপ্তম শ্রেণীতে জ্যামিতিক চিত্র ব্যবহার করেও যাচাই করেছ। a, b দ্বারা যদি দুটি রেখাংশ বোঝায়, তাহলে এই সূত্রগুলির জ্যামিতিক প্রতিরূপ কি তা-ও তোমরা জান। প্রকৃতপক্ষে, জ্যামিতিক অনুশীলনে এই ধর্মগুলি আমরা ব্যবহার করেছি। সেরূপ প্রথম সূত্রটি ব্যবহার করে আমরা পীথাগোরাসের উপপাদ্য প্রমাণ করতে পারি। পরবর্তী পৃষ্ঠায় প্রমাণটি দেওয়া হল।



চিত্র নং ঃ 199

ধরা যাক, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার $\angle A$ সমকোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $BC^2 = AB^2 + AC^2$

আমরা BC, CA ও AB বাহুকে যথাক্রমে a, b, c দ্বারা প্রকাশ করি।
প্রমাণ করতে হবে যে, $a^2 = c^2 + b^2$

অঙ্কন ঃ $EFGH$ একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করা হল, যার বাহুর দৈর্ঘ্য c ও b রেখাংশের দৈর্ঘ্যের সমষ্টির সমান। EF, FG, GH ও HE-এর উপর যথাক্রমে P, Q, R, S চারটি বিন্দু এমনভাবে নেওয়া হল যে, $EP = FQ = GR = HS = c$.

P, Q, Q, R, R, S; S, P যুক্ত করা হল।

প্রমাণঃ $\because$ $EF = FG = GH = HE = c + b$ (অঙ্কনানুসারে),

$\therefore$ $PF = QG = RH = SE = b$.

ΔABC ও ΔEPS-এর

$AB = EP$,

$AC = ES$,

অন্তর্ভূত $\angle BAC$ = অন্তর্ভূত $\angle PES$ (প্রত্যেকে সমকোণ),

$\therefore$ $\Delta ABC \equiv \Delta EPS$.

$\therefore$ $BC = PS$ (অনুরূপ বাহু),

কিন্তু $BC = a$,

$\therefore$ $PS = a$.

অনুরূপভাবে দেখান যায়, $PQ = a$, $QR = a$, $SR = a$.

আবার, $\angle EPS = \angle ABC$.

অনুরূপভাবে, ΔABC ও ΔFQP সর্বসম প্রমাণ করে পাওয়া যায়, $\angle FPQ = \angle ACB$.

$\therefore \angle EPS = \angle FPQ = \angle ABC + \angle ACB = 90^\circ$.

$\therefore \angle SPQ = 90^\circ$.

$\therefore$ $PQRS$ একটি বর্গক্ষেত্র, যার বাহুর দৈর্ঘ্য a

এখন $EFGH$ বর্গক্ষেত্র = $PQRS$ বর্গক্ষেত্র + $4\Delta ABC$ ($\because$ চারটি ত্রিভুজই ΔABC-এর সর্বসম)।

$$\therefore (c+b)^2 = a^2 + 4.\frac{1}{2}AB.AC$$

$$= a^2 + 2cb.$$

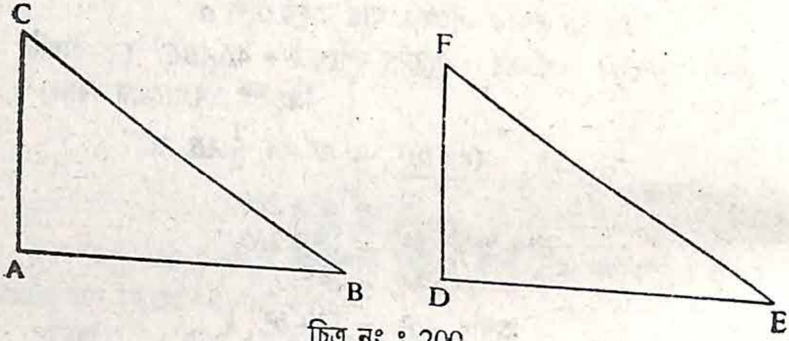
$$\therefore c^2 + 2cb + b^2 = a^2 + 2cb.$$

$$\therefore c^2 + b^2 = a^2;$$

অর্থাৎ $a^2 = c^2 + b^2$.]

উপপাদ্য 52

যেকোনো ত্রিভুজের একটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দুটির ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান হলে, ত্রিভুজটি সমকোণী হবে, যার বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কোণ সমকোণ হবে।



চিত্র নং ঃ 200

ধরা যাক, ΔABC-এর $BC^2 = AB^2 + AC^2$,

প্রমাণ করতে হবে যে, ΔABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার $\angle A$ সমকোণ।

অঙ্কন ঃ DEF একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করা হল, যার $\angle D = 1$ সমকোণ, $DE = AB$ ও $DF = AC$.

প্রমাণঃ $\because$ ΔDEF সমকোণী ত্রিভুজ এবং EF অতিভুজ,

$\therefore$ $EF^2 = DE^2 + DF^2$

$= AB^2 + AC^2$ ($\because$ $DE = AB$ এবং $DF = AC$, অঙ্কনানুসারে)

$= BC^2$.

$\therefore$ $EF = BC$.

$\therefore$ ΔABC ও ΔDEF-এর $AB = DE$ (অঙ্কনানুসারে),

$AC = DF$ (অঙ্কনানুসারে),

$BC = EF$ (প্রমাণিত),

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

$\therefore$ $\angle BAC = \angle EDF$ (অনুরূপ কোণ)

$= 1$ সমকোণ।

$\therefore$ ΔABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার $\angle A$ সমকোণ।

কয়েকটি প্রয়োগ ঃ

1. কোনো বর্গক্ষেত্রের কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ঐ বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ।

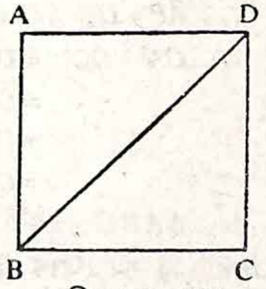
ধরা যাক, $ABCD$ একটি বর্গক্ষেত্র এবং BD একটি কর্ণ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $BD^2 = 2BC^2$.

প্রমাণ ঃ $\because$ $ABCD$ একটি বর্গক্ষেত্র,

$\therefore$ ΔBCD সমকোণী ত্রিভুজ এবং $BC = CD$.

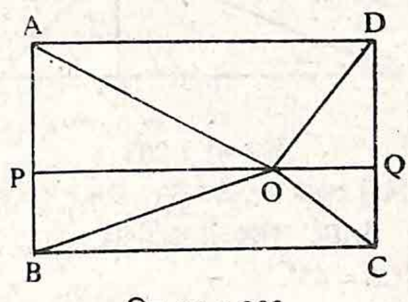
$\therefore$ $BD^2 = BC^2 + CD^2 = 2BC^2$.



চিত্র নং ঃ 201

[মন্তব্য ঃ এই ধর্ম থেকেই তোমরা বুঝতে পারবে যে একটি বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্র কিভাবে অঙ্কন করা যায়।]

2. $ABCD$ একটি আয়তক্ষেত্র এবং O আয়তক্ষেত্রের অভ্যন্তরে যেকোনো একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$.



চিত্র নং ঃ 202

অঙ্কন ঃ O বিন্দু দিয়ে BC-এর সমান্তরাল অঙ্কন করা হল, যা AB ও DC-কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ ঃ $\because$ $BC \parallel PQ$

$\therefore$ $PQ \perp AB, PQ \perp CD$.

$\therefore$ ΔAPO, ΔBPO, ΔDQO এবং ΔCQO-এর প্রত্যেকেই সমকোণী ত্রিভুজ।

$\therefore$ $OA^2 = AP^2 + OP^2$,

$OB^2 = BP^2 + OP^2$,

$OC^2 = CQ^2 + OQ^2$,

$OD^2 = DQ^2 + OQ^2$.

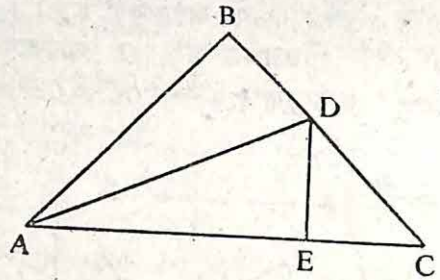
$\therefore \quad OA^2 + OC^2 = AP^2 + OP^2 + CQ^2 + OQ^2$

কিন্তু অঙ্কন অনুসারে, $APQD$ ও $BPQC$-এর প্রত্যেকেই আয়তক্ষেত্র ;

$\therefore \quad AP = DQ$ এবং $CQ = BP$.

$$\therefore \quad OA^2 + OC^2 = DQ^2 + OP^2 + BP^2 + OQ^2$$
$$= DQ^2 + OQ^2 + BP^2 + OP^2$$
$$= OD^2 + OB^2$$
$$= OB^2 + OD^2$$

3. ΔABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, যার $\angle B$ সমকোণ ; $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $CD^2 = 2BD^2$.



চিত্র নং : 203

অঙ্কন : D বিন্দু থেকে AC-এর উপর DE লম্ব অঙ্কন করা হল।

প্রমাণ : $\because \quad \Delta ABC$ সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ,

$\therefore \quad \angle ACB = 45^\circ$.

$\therefore \quad \Delta DEC$ সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

আবার, ΔABD ও ΔAED-এর

$\angle BAD = \angle EAD$ (কল্পনানুসারে),

$\angle ABD = \angle AED$ (উভয়েই সমকোণ),

AD বাহু সাধারণ (অনুরূপ বাহু),

$\therefore \quad \Delta ABD \cong \Delta AED$.

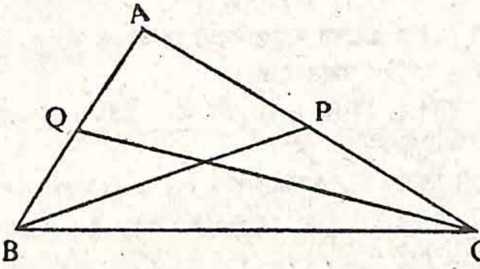
$\therefore \quad BD = DE$.

এবার, $\because \quad \Delta DEC$ সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ,

$\therefore \quad DC^2 = 2DE^2$

$= 2BD^2$

4. ABC ত্রিভুজের $\angle A$ সমকোণ। BP ও CQ দুটি মধ্যমা।



চিত্র নং ঃ 204

প্রমাণ কর যে, $5BC^2 = 4(BP^2 + CQ^2)$.

প্রমাণঃ ΔABC-এর $\angle A$ সমকোণ,

$\therefore BC^2 = AB^2 + AC^2$

$= (2AQ)^2 + (2AP)^2$ ($\because$ Q ও P যথাক্রমে AB ও AC-এর মধ্যবিন্দু।

$= 4(AQ^2 + AP^2)$.

আবার, $\Delta BAP, \Delta CAQ$ সমকোণী ত্রিভুজ,

$\therefore BP^2 = AB^2 + AP^2$

$= (2AQ)^2 + AP^2$

$= 4AQ^2 + AP^2$

এবং $CQ^2 = AC^2 + AQ^2$

$= (2AP)^2 + AQ^2$

$= 4AP^2 + AQ^2$.

$\therefore BP^2 + CQ^2 = 4AQ^2 + AP^2 + 4AP^2 + AQ^2$

$= 5(AQ^2 + AP^2)$.

$\therefore 5BC^2 = 5.4(AQ^2 + AP^2)$

$= 4.5(AQ^2 + AP^2)$

$= 4(BP^2 + CQ^2)$.

অনুশীলনী 27

1. PQR একটি ত্রিভুজ, যার $\angle Q$ সমকোণ। QR-এর উপর S যেকোনো একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $PS^2 + QR^2 = PR^2 + QS^2$

2. প্রমাণ কর যে, কোনো রম্বসের বাহুগুলির উপর অঙ্কিত বর্গের সমষ্টি কর্ণ দুটির উপর অঙ্কিত বর্গ দুটির সমষ্টির সমান হবে।

3. ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। AD, BC-এর উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 4\,AD^2$.

4. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle A$ সমকোণ। AB ও AC-এর উপর যথাক্রমে P ও Q দুটি বিন্দু। P, Q ; B, Q ও C, P যুক্ত করা হল। প্রমাণ কর যে, $BQ^2 + PC^2 = BC^2 + PQ^2$.

5. ABC ত্রিভুজের অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু O থেকে BC, CA ও AB বাহুর উপর যথাক্রমে OX, OY, OZ লম্ব অঙ্কিত হয়েছে। প্রমাণ কর যে, $AZ^2 + BX^2 + CY^2 = AY^2 + CX^2 + BZ^2$.

6. $ABCD$ চতুর্ভুজের কর্ণ দুটি পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$.

7. ΔABC-এর AD উচ্চতা। $AB>AC$ হলে, প্রমাণ কর যে, $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$.

8. RST ত্রিভুজের $\angle S$ সমকোণ। RS ও ST-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X ও Y. প্রমাণ কর যে, $RY^2 + XT^2 = 5XY^2$.

9. A[illegible]D বর্গক্ষেত্রের বহিঃস্থ যেকোনো একটি বিন্দু P. $PA>PB$ হলে, প্রমাণ কর যে, $PA^2 - PB^2 = PD^2 - PC^2$.

10. AB রেখাংশকে এমনভাবে C বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হল যে, $AC=3AB$. BC-কে বাহু করে সমবাহু ত্রিভুজ BCD অঙ্কন করা হল। প্রমাণ কর যে, $AD^2 = 7AB^2$.

11. $ABCD$ একটি বর্গক্ষেত্র। AB, BC, CD, DA-এর উপর যথাক্রমে E, F, G, H বিন্দুগুলি এমনভাবে নেওয়া হল যে $AE = BF = CG = DH$. প্রমাণ কর যে, $FH^2 = 2(AE^2 + BE^2)$.

12. ΔABC-এর শীর্ষবিন্দু B ও C থেকে AC ও AB বাহু দুটির উপর অঙ্কিত লম্ব দুটি P বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AC^2 + BP^2 = AB^2 + CP^2$.

13. ΔABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, যার $\angle C$ সমকোণ। D, AB-এর উপর যেকোনো একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $AD^2 + DB^2 = 2CD^2$.

14. ABC ত্রিভুজের $\angle A$ সমকোণ। CD মধ্যমা। প্রমাণ কর যে, $BC^2 = CD^2 + 3AD^2$.

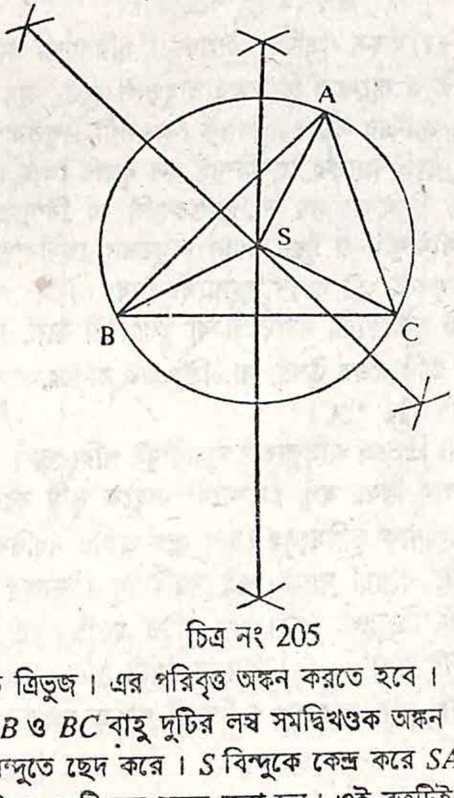
ষষ্ঠ অধ্যায়

সম্পাদ্য

4.1 পরিবৃত্ত অঙ্কন ঃ

সম্পাদ্য **5**

কোনো ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন করতে হবে।



চিত্র নং 205

ABC একটি ত্রিভুজ। এর পরিবৃত্ত অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কন ঃ *AB* ও *BC* বাহু দুটির লম্ব সমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন করা হল। তারা পরস্পরকে *S* বিন্দুতে ছেদ করে। *S* বিন্দুকে কেন্দ্র করে *SA* (অথবা *SB*, বা, *SC*) ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হল। ওই বৃত্তটিই হবে ΔABC-এর পরিবৃত্ত।

প্রমাণ ঃ *S, A* ; *S, B* ; *S, C* যুক্ত করা হল।

∵ S, AB-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের উপর একটি বিন্দু,

∴ S থেকে A ও B সমদূরবর্তী ; অর্থাৎ $SA = SB$.

অনুরূপভাবে, $SB = SC$. ∴ $SA = SB = SC$.

∴ S-কে কেন্দ্র করে SA ব্যাসার্ধ নিয়ে যে বৃত্ত অঙ্কন করা যাবে, সেই বৃত্ত B ও C বিন্দুগামী হবে, অর্থাৎ বৃত্তটি ΔABC-এর তিনটি শীর্ষবিন্দু A, B, C দিয়ে যাবে।

∴ ওই বৃত্তটিই পরিবৃত্ত।

[**মন্তব্য** : (1) অঙ্কন পদ্ধতির বিশ্লেষণ : পরিবৃত্তের সংজ্ঞা থেকে আমরা বলতে পারি পরিবৃত্ত সাপেক্ষে ত্রিভুজের বাহুগুলি বৃত্তের জ্যা। আমরা আরও জানি যে, কোন জ্যা-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক কেন্দ্রগামী। সুতরাং দুটি জ্যা অর্থাৎ দুটি বাহুর লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের ছেদবিন্দুই হল বৃত্তের কেন্দ্র। আমরা পূর্বে এ-ও জেনেছি যে, ত্রিভুজের লম্ব সমদ্বিখণ্ডকগুলি যে বিন্দুতে ছেদ করে, সে বিন্দু থেকে শীর্ষবিন্দুগুলির দূরত্ব সমান। সুতরাং ছেদবিন্দু থেকে যেকোনো শীর্ষবিন্দু পর্যন্ত দূরত্বই ওই বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য।

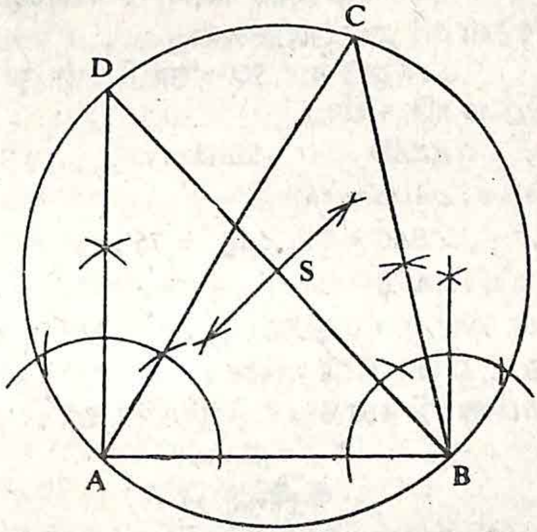
(2) ত্রিভুজটি সূক্ষ্মকোণী, সমকোণী বা স্থূলকোণী হলে, পরিকেন্দ্র যথাক্রমে ত্রিভুজের মধ্যে, অতিভুজের উপর, বা, ত্রিভুজের বাইরে, অর্থাৎ বৃহত্তম বাহুর বিপরীত দিকে অবস্থিত হবে।

(3) সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজের মধ্যবিন্দুই পরিকেন্দ্র।

(4) লক্ষ করার বিষয় হল, যেকোনো বাহুকে ভূমি করে তার বিপরীত কোণের পূরক কোণকে ভূমিসংলগ্ন কোণ ধরে একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করলেও পরিকেন্দ্র পাওয়া যাবে। ওই সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুই হবে পরিকেন্দ্র এবং ওই ত্রিভুজের সমান বাহু দুটির একটি হবে ব্যাসার্ধ। যেমন BC-কে ভূমি করে $(90° - \angle A)$ কোণের সমান দুটি কোণ যদি B ও C বিন্দুতে অঙ্কন করা যায়, তাহলেও S বিন্দুটি পাওয়া যাবে।]

একটি প্রয়োগ ঃ

1. ΔABC-এর $AB = 4 \cdot 5$ সেমি, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ABC = 75^\circ$; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। আবার, ΔABD-এর $\angle BAD = 90^\circ$, $\angle ABD = 45^\circ$ এবং AB-এর যে পার্শ্বে C বিন্দু আছে, D বিন্দুও সেই পার্শ্বেই থাকবে। ΔABD অঙ্কন কর। ΔABD-এর পরিবৃত্ত অঙ্কন কর। লক্ষ কর তো, C বিন্দু ওই পরিবৃত্তের উপর অবস্থিত কি না। তুমি যা লক্ষ করলে তার যাথার্থ্য যুক্তি দিয়ে সমর্থন কর।



চিত্র নং 206

অঙ্কন ঃ স্কেলের সাহায্যে $AB = 4 \cdot 5$ সেমি একটি রেখাংশ অঙ্কন করা হল। AB-কে বাহু করে A বিন্দুতে 60° এবং BA-কে বাহু করে B বিন্দুতে 75° মানের কোণ দুটি অঙ্কন করা হল। এদের অপর বাহু দুটি C বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে।

তাহলে, ΔABC অঙ্কিত হল।

আবার, AB-কে বাহু করে A বিন্দুতে 90° এবং BA-কে বাহু করে B বিন্দুতে 45° মানের দুটি কোণ এমনভাবে অঙ্কন করা হল যে, এদের অপর বাহু দুটি যেন AB-এর যে পার্শ্বে C বিন্দু অবস্থিত সেই পার্শ্বেই পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে ΔABD অঙ্কিত হল।

এবার, BD বাহুর মধ্যবিন্দু S-কে কেন্দ্র করে SD ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হল।

ওই বৃত্তই ΔABD-এর পরিবৃত্ত।

লক্ষ করা গেল যে, C বিন্দু ওই বৃত্তের উপর অবস্থিত।

প্রমাণ ঃ অঙ্কনানুসারে, ΔABC ও ΔABD দুটি উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

$\because \angle BAD = 90°$,

$\therefore \Delta BAD$ সমকোণী ত্রিভুজ, যার BD অতিভুজ।

$\because$ সমকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র অতিভুজের মধ্যবিন্দু ও ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য অতিভুজের দৈর্ঘ্যের অর্ধেক ;

$\therefore$ S-কে কেন্দ্র করে SD ব্যাসার্ধ নিয়ে যে বৃত্ত অঙ্কিত হল, তা-ই ΔABD-এর পরিবৃত্ত হবে।

$\because \angle BAD = 90°, \angle ABD = 45°$,

$\therefore \angle ADB = 45°$.

আবার, $\because \angle BAC = 60°, \angle ABC = 75°$,

$\therefore \angle ACB = 45°$

$\therefore \angle ADB = \angle ACB$

$\therefore A, B, C, D$ বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ।

$\therefore \Delta ABD$-এর পরিবৃত্তের উপর C বিন্দু অবস্থিত হবে।

অনুশীলনী 28

[প্রতি ক্ষেত্রে অঙ্কন প্রণালী লিখবে এবং প্রমাণ দেবে।]

1. নিম্নলিখিত ত্রিভুজগুলি অঙ্কন কর এবং প্রতিটি ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন কর। স্কেলের সাহায্যে প্রতি ক্ষেত্রে বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(i) তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সেমি 7 সেমি, 9 সেমি।

(ii) তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সেমি, 8 সেমি, 10 সেমি।

(iii) তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সেমি, 7 সেমি, 8 সেমি।

(iv) দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য 4·5 সেমি ও 6·5 সেমি এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60°

(v) একটি বাহুর 8·2 সেমি এবং ওই বাহুসংলগ্ন কোণ দুটি 30° ও 45°

(vi) একটি সমবাহু ত্রিভুজ, যার প্রত্যেকটি বাহু 6 সেমি।

(vii) একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, যার ভূমির দৈর্ঘ্য 7·2 সেমি এবং সমান বাহুর প্রত্যেকটি 9 সেমি

(viii) একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, যার ভূমির দৈর্ঘ্য 5 [illegible] সেমি এবং ভূমি সংলগ্ন প্রত্যেকটি কোণ 75°.

(ix) একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার সমকোণ সংলগ্ন বাহু দুটির দৈর্ঘ্য 4 সেমি ও 7 সেমি।

(x) একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার অতিভুজ 12 সেমি এবং অপর একটি বাহু 5 সেমি।

2. $PQ = 7{\cdot}5$ সেমি $\angle QPR = 50^\circ, \angle PQR = 70^\circ$;
$PQ = 7{\cdot}5$ সেমি, $\angle QPS = 40^\circ, \angle PQS = 80^\circ$;

ΔPQR ও ΔPQS এমনভাবে অঙ্কন কর যে R ও S বিন্দু যেন PQ-এর একই দিকে অবস্থিত হয়। ΔPQR-এর পরিবৃত্ত অঙ্কন কর। S বিন্দুর অবস্থান, বৃত্তের ভিতরে, উপরে, না বাইরে তা লক্ষ কর।

3. $AB = 4{\cdot}8$ সেমি, $\angle BAC = 55^\circ, \angle ABC = 60^\circ$,
$AB = 4{\cdot}8$ সেমি, $\angle BAD = 35^\circ, \angle ABD = 30^\circ$;

ΔABC ও ΔABD এমনভাবে অঙ্কন কর যে, C ও D বিন্দু যেন AB-এর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হয়। ΔABC-এর পরিবৃত্ত অঙ্কন কর। অন্য কি বৈশিষ্ট্য লক্ষ করছ, তা উল্লেখ কর।

4. নিম্নলিখিত ত্রিভুজগুলি অঙ্কন কর। প্রতিটি ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন কর। তাদের ব্যাসার্ধগুলি স্কেলের সাহায্যে নির্ণয় কর এবং ব্যাসার্ধগুলির মধ্যে কোনো সম্পর্ক দেখতে পাচ্ছ কিনা বল।

(i) ΔABC-এর $AB = 3{\cdot}9$ সেমি, $\angle BAC = 40^\circ, \angle ABC = 60^\circ$,

(ii) ΔPQR-এর $PQ = 3{\cdot}9$ সেমি, $\angle QPR = 45^\circ, \angle PQR = 55^\circ$,

(iii) ΔXYZ-এর $XY = 3{\cdot}9$ সেমি, $\angle YXZ = 30^\circ, \angle XYZ = 70^\circ$,

(iv) ΔDEF-এর $DE = 3{\cdot}9$ সেমি, $\angle EDF = 50^\circ, \angle DEF = 50^\circ$,

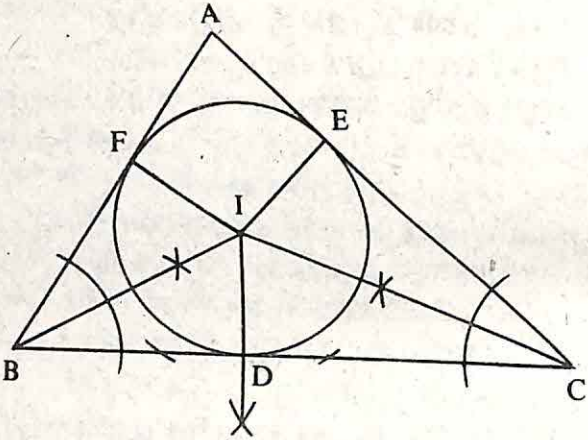
5. $ABCD$ চতুর্ভুজটি অঙ্কন কর, যার $AB = 4$ সেমি, $BC = 7$ সেমি, $CD = 4$ সেমি, $\angle ABC = 60^\circ, \angle BCD = 60^\circ$, ΔADC-এর পরিবৃত্ত অঙ্কন কর। অন্য কি বৈশিষ্ট্য লক্ষ করছ তা উল্লেখ কর।

6. $PQRS$ আয়তক্ষেত্রটি অঙ্কন কর, যার $PQ = 4$ সেমি এবং $QR = 6$ সেমি। আয়তক্ষেত্রের কর্ণগুলি অঙ্কন কর। বলতো, ΔPQR-এর পরিবৃত্তের কেন্দ্র কোথায় হবে এবং ব্যাসার্ধ কত হবে। পরিবৃত্তটি অঙ্কন কর।

4.2 অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন ঃ

সম্পাদ্য 6

কোনো ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে।



চিত্র নং:207

ধরা যাক, ABC একটি ত্রিভুজ।

ΔABC-এর অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কন ঃ $\angle ABC$ ও $\angle ACB$-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক অঙ্কন করা হল, যারা পরস্পরকে I বিন্দুতে ছেদ করে। I বিন্দু থেকে BC বাহুর উপর লম্ব অঙ্কন করা হল যা BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করে। I-কে কেন্দ্র করে ID ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হল। ঐ বৃত্তই হল ΔABC-এর অন্তর্বৃত্ত।

প্রমাণ ঃ IE ও IF যথাক্রমে AC ও AB-এর উপর লম্ব।

$\because I$ বিন্দু $\angle ABC$-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত,

$\therefore I$ বিন্দু BC ও AB থেকে সমদূরবর্তী ;

$\therefore ID = IF.$

অনুরূপভাবে, $ID = IE.$ $\therefore ID = IE = IF.$

$\therefore I$-কে কেন্দ্র করে ID ব্যাসার্ধ নিয়ে যে বৃত্ত টানা যাবে, তা E ও F বিন্দুগামী হবে।

আবার, $\because ID, IE, IF$ যথাক্রমে BC, CA ও AB-এর উপর লম্ব,

$\therefore BC, CA$ ও AB বৃত্তের স্পর্শক।

$\therefore$ বৃত্তটি ΔABC-এর অন্তর্বৃত্ত।

[মন্তব্য ঃ (1) অঙ্কন পদ্ধতির বিশ্লেষণ ঃ অন্তর্বৃত্তের সংজ্ঞা থেকে আমরা জানি, অন্তর্বৃত্ত সাপেক্ষে ত্রিভুজের বাহুগুলি বৃত্তের স্পর্শক। আমরা আরও জানি

যে, দুটি স্পর্শকের অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডক কেন্দ্রগামী ; অর্থাৎ ত্রিভুজের কোনো কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক অন্তঃকেন্দ্রগামী হবে । সুতরাং দুটি কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডকদ্বয়ের ছেদবিন্দুই হবে অন্তঃকেন্দ্র । আবার, যেহেতু বৃত্ত সাপেক্ষে বাহুগুলি স্পর্শক, সুতরাং কেন্দ্র থেকে ঐ বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বদৈর্ঘ্যই হল ব্যাসার্ধ । এভাবে কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ পাওয়ার ফলে বৃত্ত অঙ্কন হল ।

(2) সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রে কোনো কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং বিপরীত বাহুর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক একই সরলরেখা, সুতরাং সমবাহু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ও অন্তঃকেন্দ্র একই বিন্দু ।]

অনুশীলনী 29

(প্রতি ক্ষেত্রেই অঙ্কন প্রণালী লিখবে এবং প্রমাণ দেবে ।)

1. নিম্নলিখিত ত্রিভুজগুলি অঙ্কন কর এবং প্রতিটি ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন কর । স্কেলের সাহায্যে প্রতি ক্ষেত্রে বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর ।

(i) তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 8·5 সেমি, 6·5 সেমি, 5 সেমি ।

(ii) দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য 7·3 সেমি, 6 সেমি এবং তাদের অন্তর্ভুত কোণ 75°.

(iii) একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6·9 সেমি এবং এবং ঐ বাহু সংলগ্ন কোণ দুটির মান 60° ও 75°.

(iv) একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার সমকোণ সংলগ্ন বাহু দুটি 7 সেমি ও 9 সেমি ।

(v) একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার অতিভুজ 10 সেমি এবং অপর একটি বাহু 6·5 সেমি ।

(vi) একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, যার ভূমি 8·3 সেমি এবং সমান বাহু দুটির প্রত্যেকটি 7·1 সেমি ।

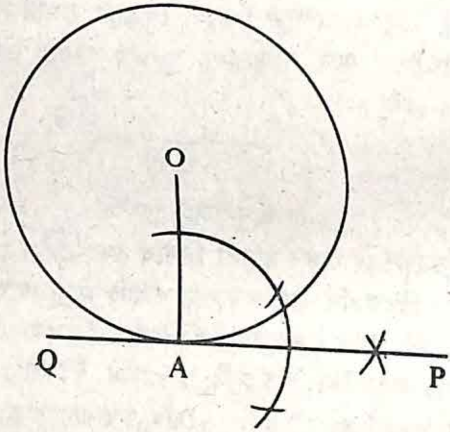
(vii) একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, যার ভূমি 10 সেমি এবং সমান কোণের প্রত্যেকটি 45°.

2. 7 সেমি বাহুবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজটি অঙ্কন কর । ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্ত ও অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন কর । স্কেলের সাহায্যে পরিব্যাসার্ধ ও অন্তর্ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর । তাদের মধ্যে কোনো সম্পর্ক আছে কি না লক্ষ করতো ।

4.3 স্পর্শক অঙ্কন ঃ

সম্পাদ্য 7

কোনো একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত কোনো একটি বিন্দুতে ওই বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন করতে হবে।



চিত্র নং:208

ধরা যাক, O-কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত A একটি বিন্দু। A বিন্দুতে বৃত্তের একটি স্পর্শক অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কন ঃ O, A যুক্ত করা হল। A বিন্দুতে OA-এর উপর PQ লম্ব অঙ্কন করা হল।

তাহলে PQ-ই হল উদ্দিষ্ট স্পর্শক।

প্রমাণ ঃ আমরা জানি বৃত্তের কোনো ব্যাসার্ধ যে বিন্দুতে বৃত্তকে ছেদ করে সেই বিন্দুতে ঐ ব্যাসার্ধের উপর অঙ্কিত লম্ব, ঐ বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক হয়।

$\because$ OA বৃত্তের ব্যাসার্ধ

এবং $OA \perp PQ$ (অঙ্কনানুসারে)

$\therefore$ PQ, A বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক।

অনুশীলনী 30

(প্রতি ক্ষেত্রে অঙ্কন প্রণালী লিখবে এবং প্রমাণ দেবে)

1. 5 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন কর। ঐ বৃত্তের উপর অবস্থিত যেকোনো বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন কর।

2. 3 সেমি দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট AB একটি রেখাংশ নাও। A-কে কেন্দ্র করে AB ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন কর। B বিন্দুতে ঐ বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন কর।

3. O-কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের PQ একটি জ্যা। P ও Q বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন কর।

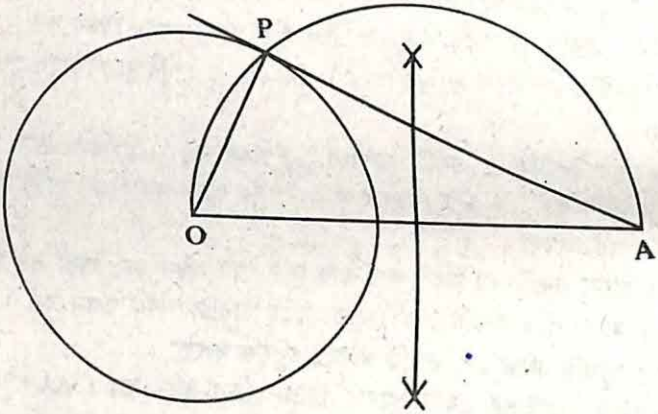
4. 8 সেমি দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি রেখাংশ XY অঙ্কন কর। XY-কে ব্যাস করে একটি বৃত্ত অঙ্কন কর। X ও Y বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন কর। এই স্পর্শক দুটির মধ্যে কি সম্পর্ক বলতো।

5. যেকোনো একটি বৃত্ত অঙ্কন করে তার দুটি ব্যাস অঙ্কন কর, যারা লম্ব ভাবে অবস্থিত। ব্যাস দুটির চারটি প্রান্তবিন্দুতে বৃত্তের চারটি স্পর্শক অঙ্কন কর। এর ফলে যে চতুর্ভূজটি গঠিত হল, তা কি ধরনের চতুর্ভূজ বলতো।

6. 6 সেমি বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC অঙ্কন কর। ΔABC-এর পরিবৃত্ত অঙ্কন কর। A, B ও C বিন্দুতে ঐ পরিবৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন কর।

সম্পাদ্য 8

যেকোনো একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে ওই বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন করতে হবে।



চিত্র নং: 209

ধরা যাক, O-কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু A.

A বিন্দু থেকে বৃত্তের একটি স্পর্শক অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কন ঃ O, A যুক্ত করা হল। OA-কে ব্যাস করে একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করা হল, যা বৃত্তকে P বিন্দুতে ছেদ করে। A, P যুক্ত করে বর্ধিত করা হল।

তাহলে AP-ই হল উদ্দিষ্ট স্পর্শক।

প্রমাণ ঃ O, P যুক্ত করা হল।

$\because \angle OPA$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ,

$\therefore \angle OPA = 1$ সমকোণ। $\therefore PA \perp OP$

$\therefore PA, P$ বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক।

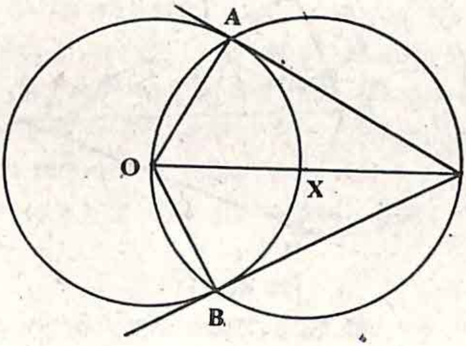
[মন্তব্য ঃ (1) অঙ্কন পদ্ধতির বিশ্লেষণ ঃ আমরা মনে করে নিই, AP একটি স্পর্শক, তাহলে $\angle OPA$ হবে একটি সমকোণ। এই সমকোণটি পাওয়ার জন্য আমাদের একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করতে হবে, যার ব্যাস হবে OA এবং P হবে এই অর্ধবৃত্ত ও মূল বৃত্তের ছেদবিন্দু।

(2) অর্ধবৃত্তটি সম্পূর্ণ করলে তা মূল বৃত্তকে আরও একটি বিন্দুতে ছেদ করত। সুতরাং বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু থেকে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা যেত।

(3) অর্ধবৃত্তটি সম্পূর্ণ না অঙ্কন করে এমন বৃত্তচাপ অঙ্কন করলেই চলত, যা মূল বৃত্তকে ছেদ করে।]

কয়েকটি প্রয়োগ ঃ

(1) 2·5 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট O-কেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত অঙ্কন কর। বৃত্তের বাইরে P এমন একটি বিন্দু, O বিন্দু থেকে যার দূরত্ব 5 সেমি। P বিন্দু থেকে ঐ বৃত্তের দুটি স্পর্শক অঙ্কন কর।



চিত্র নং:210

অঙ্কন ঃ OX একটি 2·5 সেমি দৈর্ঘ্যের রেখাংশ নেওয়া হল। O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OX ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হল। এবার OX-কে P বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যে, $XP = OX$.

আবার, X বিন্দুকে কেন্দ্র করে XO ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হল, যা O-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করে। P, A ও P, B যুক্ত করে বর্ধিত করা হল।

তাহলে PA ও PB-ই হল উদ্দিষ্ট দুটি স্পর্শক।

প্রমাণ ঃ $\because$ $OX = 2·5$ সেমি,

$\therefore$ AXB বৃত্তটিই হল উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

আবার, $\because$ $QX = XP$,

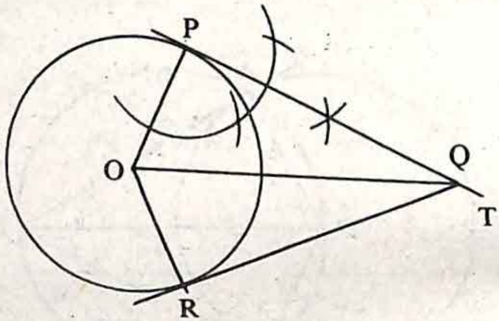
$\therefore$ X-কেন্দ্রীয় বৃত্তটির OP ব্যাস।

$\therefore$ $\angle OAP = \angle OBP = 1$ সমকোণ।

$\therefore$ PA ও PB ঐ বৃত্তের স্পর্শক।

[মন্তব্য ঃ X বিন্দুকে কেন্দ্র করে সম্পূর্ণ বৃত্ত অঙ্কন না করে দুদিকে দুটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করলেই চলত, যারা O-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে ছেদ করে। তাহলেই A এবং B বিন্দু পাওয়া যেত।]

2. O-কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত P বিন্দুতে ঐ বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন কর। ঐ স্পর্শকের উপর Q একটি বিন্দু নাও। Q বিন্দু থেকে ঐ বৃত্তের অপর স্পর্শকটি অঙ্কন কর।



চিত্র নং:211

অঙ্কন : O, P যুক্ত করা হল। OP-এর উপর P বিন্দুতে PT লম্ব অঙ্কন করা হল।

PT-এর উপর Q একটি বিন্দু নেওয়া হল। Q বিন্দুকে কেন্দ্র করে QP-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করা হল, যা O কেন্দ্রীয় বৃত্তকে R বিন্দুতে ছেদ করে। Q, R যুক্ত করা হল।

তাহলে QR-ই হল Q বিন্দু থেকে ঐ বৃত্তের অপর স্পর্শক।

প্রমাণ : O, R ; O, Q যুক্ত করা হল।

ΔORQ ও ΔOPQ-এর

$OR = OP$ (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ),

$RQ = PQ$ (অঙ্কনানুসারে),

OQ সাধারণ বাহু,

$\therefore \Delta ORQ \cong \Delta OPQ$.

$\therefore \angle ORQ = \angle OPQ = 1$ সমকোণ

$\therefore QR$, R বিন্দুতে স্পর্শক।

অনুশীলনী 31

(প্রতিক্ষেত্রে অঙ্কন প্রণালী লিখবে এবং প্রমাণ দেবে।)

1. 2·5 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন কর। ঐ বৃত্তের বাইরে এমন একটি বিন্দু নাও, যার দূরত্ব কেন্দ্র থেকে 6·5 সেমি। ঐ বহিঃস্থ বিন্দু থেকে বৃত্তের একটি স্পর্শক অঙ্কন কর। স্কেলের সাহায্যে ঐ স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

2. 5 সেমি বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC অঙ্কন কর। ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন কর। A বিন্দুতে ঐ বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন কর এবং স্পর্শকের উপর P এমন একটি বিন্দু নাও যে $AP = 5$ সেমি. P বিন্দু থেকে বৃত্তের অপর স্পর্শকটি অঙ্কন কর। লক্ষ করতো, এই স্পর্শকটি বৃত্তকে কোন বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।

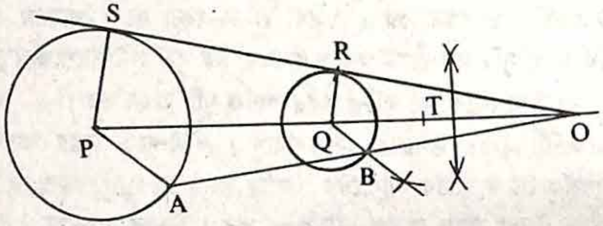
3. AB একটি রেখাংশের উপর O একটি বিন্দু নাও। O বিন্দুতে AB-এর উপর PQ একটি লম্ব অঙ্কন কর। A এবং B-কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে AO এবং BO ব্যাসার্ধ নিয়ে দুটি বৃত্ত অঙ্কন কর। বলতো, এই বৃত্ত দুটি সাপেক্ষে PQ-কে কি বলা যায়। P বিন্দু থেকে বৃত্ত দুটির অপর স্পর্শক দুটি অঙ্কন কর।

4. O-কেন্দ্রীয় বৃত্তের উপর P একটি বিন্দু। P বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন কর। ঐ স্পর্শক থেকে বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সমান করে PQ অংশ কেটে নাও। Q বিন্দু থেকে বৃত্তের অপর স্পর্শক QR অঙ্কন কর। চাঁদার সাহায্যে $\angle PQR$-এর মান নির্ণয় কর।

সম্পাদ্য 9

দুটি বৃত্তের একটি সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন করতে হবে।

প্রথম পদ্ধতি ঃ



চিত্র নং:212

ধরা যাক, দুটি বৃত্তের কেন্দ্র যথাক্রমে P ও Q.

ঐ দুটি বৃত্তের একটি সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কন ঃ P, Q যুক্ত করে বর্ধিত করা হল। P-কেন্দ্রীয় বৃত্তের PA একটি ব্যাসার্ধ টানা হল। PA-এর সমান্তরাল করে Q-কেন্দ্রীয় বৃত্তের একটি ব্যাসার্ধ QB অঙ্কন করা হল। PA ও PB যেন PQ-এর একই দিকে অবস্থিত থাকে। A, B যুক্ত করে বর্ধিত করা হল। বর্ধিত AB, বর্ধিত PQ-কে O বিন্দুতে ছেদ করে। OQ-এর মধ্যবিন্দু T নির্ণয় করা হল। T বিন্দুকে কেন্দ্র করে TQ-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করা হল, যা Q-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে R বিন্দুতে ছেদ করে। O, R যুক্ত করে বর্ধিত করা হল।

তাহলে OR সরলরেখাই উদ্দিষ্ট সরল সাধারণ স্পর্শক।

প্রামণ ঃ Q, R যুক্ত করা হল এবং P বিন্দু থেকে OR সরলরেখার উপর লম্ব অঙ্কন করা হ'ল, যা OR সরলরেখাকে S বিন্দুতে ছেদ করে।

অঙ্কনানুসারে, OR, Q-কেন্দ্রীয় বৃত্তের স্পর্শক।

আবার, $PA \parallel QB$ এবং AB ভেদক,

$\therefore \angle PAB = \angle QBO$ (অনুরূপ কোণ)।

অনুরূপভাবে, $\angle APO = \angle BQO$ (অনুরূপ কোণ)

[$\because PA \parallel QB$ এবং PQ ভেদক]।

$\therefore \Delta OPA$ ও ΔOQB-এর

$\angle PAO = \angle QBO$,

$\angle APO = \angle BQO$

এবং $\angle AOP = \angle BOQ$ (সাধারণ কোণ)

$\therefore \Delta OPA$ ও ΔOQB সদৃশকোণী।

$\therefore \dfrac{OP}{OQ} = \dfrac{AP}{BQ}$

আবার, PS ও QR, OR সরলরেখার উপর লম্ব,

$\therefore PS \parallel QR$ এবং SR ও PQ ভেদক

$\therefore \Delta OPS$ ও ΔOQR-এর

$\angle PSO = \angle QRO$ (অনুরূপ কোণ),

$\angle SPO = \angle RQO$ (অনুরূপ কোণ),

$\angle POS = \angle QOR$ (সাধারণ কোণ)।

$\therefore \Delta OPS$ ও ΔOQR সদৃশকোণী।

$\therefore \dfrac{OP}{OQ} = \dfrac{PS}{QR}$

$\therefore \dfrac{PS}{QR} = \dfrac{AP}{BQ} = \dfrac{AP}{QR}$

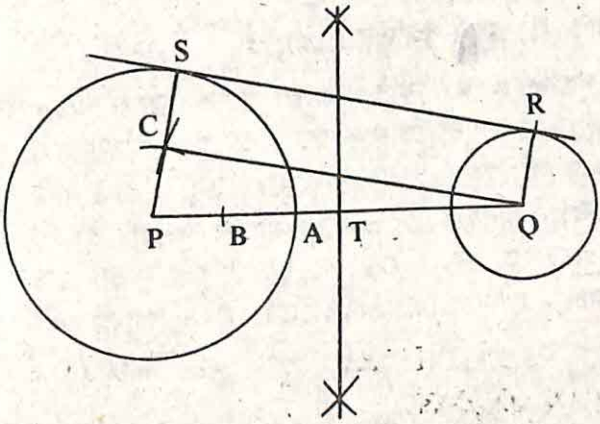
[$BQ = QR$. $\because$ Q-কেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\therefore PS = AP = P$-কেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ এবং $\angle PSR = 1$ সমকোণ।

$\therefore OS$, P-কেন্দ্রীয় বৃত্তের স্পর্শক।

$\therefore OR$, অর্থাৎ ORS দুটি বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক এবং যেহেতু বৃত্ত দুটি OR এর একই পার্শ্বে অবস্থিত, সুতরাং OR একটি সরল সাধারণ স্পর্শক।

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ



চিত্র নং:213

ধরা যাক, দুটি বৃত্তের কেন্দ্র যথাক্রমে P ও Q.

এই দুটি বৃত্তের একটি সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কন ঃ P, Q যুক্ত করা হল এবং PQ-এর মধ্যবিন্দু T নির্ণয় করা হল। মনে করি, PQ, P-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে A বিন্দুতে ছেদ করে। AP থেকে Q-কেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান করে AB অংশ কেটে নেওয়া হল। T বিন্দুকে কেন্দ্র করে TP-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে এবং P বিন্দুকে কেন্দ্র করে PB-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে যথাক্রমে দুটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করা হল। মনে করি, ওই বৃত্তচাপ দুটি পরস্পরকে C বিন্দুতে ছেদ করে। P, C যুক্ত করে বর্ধিত করা হল, যা বৃত্তকে S বিন্দুতে ছেদ করে। C, Q যুক্ত করা হল। S বিন্দুকে কেন্দ্র করে CQ-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করা হল, যা Q-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে R বিন্দুতে ছেদ করে। S, R যুক্ত করা হল।

তাহলে SR-ই হল উদ্দিষ্ট সরল সাধারণ স্পর্শক।

প্রমাণ ঃ অঙ্কনানুসারে, $\angle PCQ$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ,

$\angle PCQ = 1$ সমকোণ।

আবার, $CS = PS - PC = PA - PB = AB = QR$

এবং $SR = CQ$ (অঙ্কনানুসারে)

$CQRS$ একটি সামান্তরিক, যার $\angle QCS = 1$ সমকোণ।

$CQRS$ একটি আয়তক্ষেত্র।

$\angle PSR$ এবং $\angle QRS$-এর প্রত্যেকেই 1 সমকোণ।

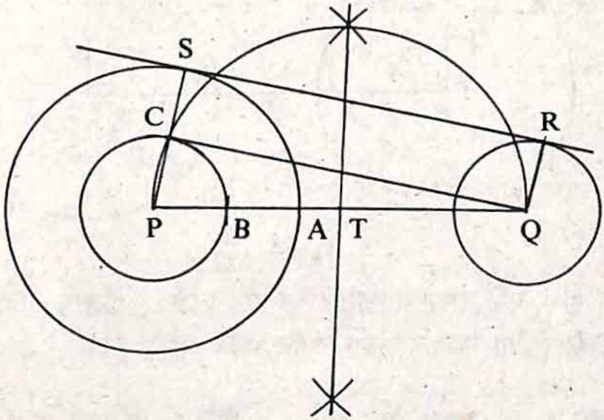
$SR \perp PS$ এবং $SR \perp QR$

$\therefore SR$ দুটি বৃত্তেরই স্পর্শক, অর্থাৎ দুটি বৃত্তের সরল সাধারণ স্পর্শক।

মন্তব্য ঃ (1) অঙ্কন পদ্ধতির বিশ্লেষণ ঃ

প্রথম পদ্ধতি ঃ মনে করি, সাধারণ স্পর্শক SR কেন্দ্রদ্বয়-সংযোজক সরলরেখা PQ-কে O বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং, $\angle OSP$ ও $\angle ORQ$ এর প্রত্যেকেই এক সমকোণ, অর্থাৎ $PS \perp OS$ এবং $QR \perp OS$. সুতরাং, O বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করতে পারলেই সাধারণ স্পর্শকটি অঙ্কন করা সম্ভব হবে। এবার যেহেতু, $PS \perp OS$ এবং $QR \perp OS$, সুতরাং $PS \parallel QR$. এ থেকে প্রমাণ করা যাবে যে, ΔOPS এবং ΔOQR সদৃশকোণী; সুতরাং $\frac{OP}{OQ} = \frac{PS}{QR}$. অর্থাৎ PQ রেখাংশ O বিন্দুতে দুটি ব্যাসার্ধের অনুপাতে বহির্বিভক্ত হয়েছে। অতএব PA ও QB দুটি সমান্তরাল ব্যাসার্ধ অঙ্কন করে তার প্রান্তবিন্দু দুটি যুক্ত করে বর্ধিত PQ-কে ছেদ করাবার জন্য বর্ধিত করা হল। এভাবেই O বিন্দুর অবস্থান নির্ণীত হল।

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ



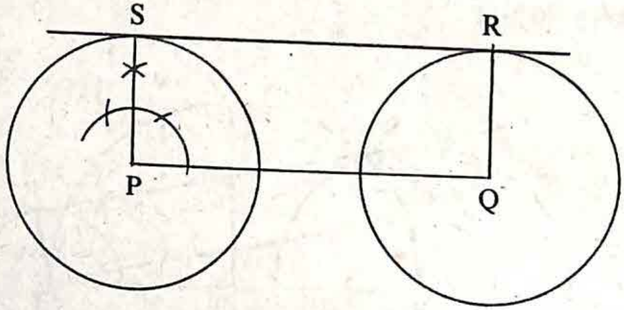
চিত্র নং: 214

মনে করি, সরল সাধারণ স্পর্শক SR ; সুতরাং $PS \perp SR$, $QR \perp SR$, সেজন্য $PS \parallel QR$. $RS \parallel QC$ অঙ্কন করা হ'ল। অতএব $CQRS$ আয়তক্ষেত্র। এবার C বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করতে পারলেই S ও R বিন্দুর অবস্থান, অর্থাৎ SR সাধারণ স্পর্শকটি পাওয়া যাবে। আয়তক্ষেত্র $CQRS$ থেকে পাওয়া যায় $QR = CS$. সুতরাং, PC দুটি ব্যাসার্ধের বিয়োগফলের সমান এবং $\angle PCQ$ এক সমকোণ বলেই এটি PQ ব্যাসের উপর অঙ্কিত অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। সুতরাং C বিন্দু হল দুটি বৃত্তের বাসার্ধের বিয়োগফলের সমান ব্যাসার্ধবিশিষ্ট P-কেন্দ্রীয় একটি নতুন বৃত্ত এবং পূর্বোক্ত অর্ধবৃত্তের ছেদবিন্দু। সেজন্য C বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়ের জন্য ঐ নতুন বৃত্তটি এবং অর্ধবৃত্তটি অঙ্কন করা প্রয়োজন। অপরিচ্ছন্নতা এড়াবার জন্য 213 নং চিত্রে নতুন বৃত্তটি এবং অর্ধবৃত্তটি পুরোপুরি অঙ্কন না করে দুটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করা হয়েছে। কেবল অঙ্কন করতে হলে, C, Q যুক্ত না করলেও চলবে।

(2) সরল সাধারণ স্পর্শক আরও একটি অঙ্কন করা যেত, অর্থাৎ দুটি বৃত্তের দুটি সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

(3) সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কনের জন্য বৃত্ত দুটির একটি অপরটির বহিঃস্থ হতে হবে, অথবা, পরস্পরচ্ছেদী হতে হবে।

(4) বৃত্ত দুটির ব্যাসার্ধ সমান হলে, এই অঙ্কন পদ্ধতি কার্যকরী হবে না। তখন অঙ্কন পদ্ধতি কি হবে তা পরবর্তী পৃষ্ঠায় দেওয়া হল ঃ



চিত্র নং : 215

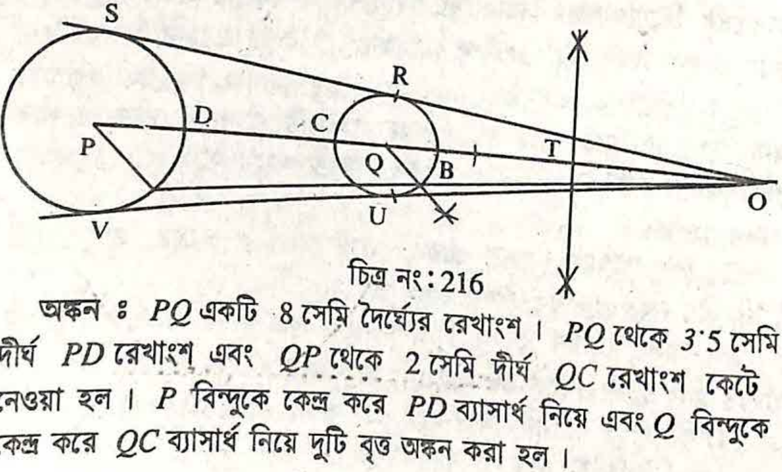
ধরা যাক, দুটি সমান ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র যথাক্রমে P ও Q. এই বৃত্ত দুটির সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কন ঃ P, Q যুক্ত করা হল। P বিন্দুতে PQ-এর উপর লম্ব অঙ্কন করা হল, যা P-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে S বিন্দুতে ছেদ করে। S-কে কেন্দ্রে করে PQ-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করা হল, যা Q-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে R বিন্দুতে ছেদ করে। S, R যুক্ত করা হল।

তাহলে SR-ই হল ঐ বৃত্ত দুটির সরল সাধারণ স্পর্শক।]

কয়েকটি প্রয়োগ ঃ

1. 3·5 সেমি ও 2 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত অঙ্কন কর, যাদের কেন্দ্র দুটির মধ্যে দূরত্ব 8 সেমি। ঐ বৃত্ত দুটির সরল সাধারণ স্পর্শক দুটি অঙ্কন কর।



চিত্র নং : 216

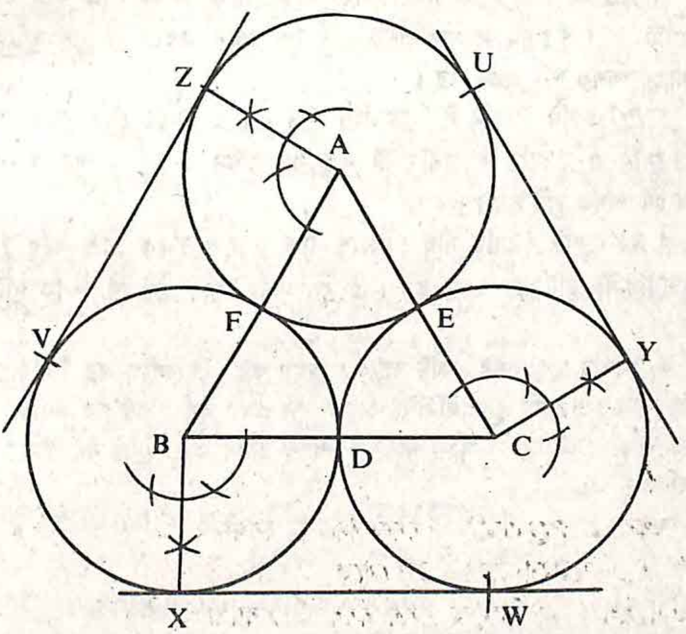
অঙ্কন ঃ PQ একটি 8 সেমি দৈর্ঘ্যের রেখাংশ। PQ থেকে 3·5 সেমি দীর্ঘ PD রেখাংশ এবং QP থেকে 2 সেমি দীর্ঘ QC রেখাংশ কেটে নেওয়া হল। P বিন্দুকে কেন্দ্র করে PD ব্যাসার্ধ নিয়ে এবং Q বিন্দুকে কেন্দ্র করে QC ব্যাসার্ধ নিয়ে দুটি বৃত্ত অঙ্কন করা হল।

P-কেন্দ্রীয় বৃত্তের একটি ব্যাসার্ধ *PA* অঙ্কন করা হল। *PA*-এর সমান্তরাল করে *PQ*-এর একই দিকে *Q*-কেন্দ্রীয় বৃত্তের একটি ব্যাসার্ধ *QB* অঙ্কন করা হল। *A*, *B* যুক্ত করে বর্ধিত করা হল, যা বর্ধিত *PQ*-কে *O*-বিন্দুতে ছেদ করে। *QO*-এর মধ্যবিন্দু *T* নির্ণয় করা হল। *T* বিন্দুকে কেন্দ্র করে *TQ*-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করা হল, যা *Q*-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে *R* বিন্দুতে ছেদ করে। *O*, *R* যুক্ত করে বর্ধিত করা হল, যা *P* কেন্দ্রীয় বৃত্তকে *S* বিন্দুতে স্পর্শ করে। তাহলে *OS* হ'ল বৃত্ত দুটির একটি সরল সাধারণ স্পর্শক। আবার *O* বিন্দুকে কেন্দ্র করে *OR*-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করা হল, যা *Q*-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে *U*-বিন্দুতে স্পর্শ করে। *O*, *U* যুক্ত করে বর্ধিত করা হল, যা *P*-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে *V* বিন্দুতে স্পর্শ করে।

তাহলে, *OV*-ই হল ঐ দুটি বৃত্তের দ্বিতীয় সরল সাধারণ স্পর্শক।

(অঙ্কন প্রণালীর যৌক্তিকতা প্রমাণ কর।)

2. 5 সেমি বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ *ABC* অঙ্কন কর। *A*, *B*, *C*-কে কেন্দ্র করে 2·5 সেমি ব্যাসার্ধের বৃত্তগুলি অঙ্কন কর।



চিত্র নং : 217

ঐ বৃত্তগুলির দুটি করে নিয়ে তাদের সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন কর, যারা ত্রিভুজের বাইরে অবস্থিত।

অঙ্কন : 5 সেমি বাহুবিশিষ্ট ABC সমবাহু ত্রিভুজটি অঙ্কন করা হল। AB, BC ও CA থেকে 2·5 সেমি-এর সমান করে যথাক্রমে AF, BD ও CE অংশ কেটে নেওয়া হল। A, B, C-কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে AF, BD ও CE ব্যাসার্ধ নিয়ে তিনটি বৃত্ত অঙ্কন করা হল। BC-এর উপর B বিন্দুতে, CA-এর উপর C বিন্দুতে এবং AB-এর উপর A বিন্দুতে যথাক্রমে BX, CY ও AZ লম্ব অঙ্কন করা হল, যারা B-কেন্দ্রীয়, C-কেন্দ্রীয় ও A-কেন্দ্রীয় বৃত্ত তিনটিকে যথাক্রমে X, Y ও Z বিন্দুতে ছেদ করল। X, Y ও Z-কে কেন্দ্র করে 5 সেমি ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্তচাপগুলি অঙ্কন করা হল, যারা C-কেন্দ্রীয় A-কেন্দ্রীয় ও B-কেন্দ্রীয় বৃত্ত তিনটিকে যথাক্রমে W, U ও V বিন্দুতে ছেদ করে। X, W ; Y, U ও Z, V যুক্ত করা হল।

তাহলে XW, YU এবং ZV-ই হল তিনটি সরল সাধারণ স্পর্শক।

অনুশীলনী 32

1. AB একটি 7 সেমি দীর্ঘ রেখাংশ নাও। A ও B-কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে 3 সেমি ও 1·5 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত অঙ্কন কর। ঐ বৃত্ত দুটির সরল সাধারণ স্পর্শক দুটি অঙ্কন কর।

2. PQ একটি 5 সেমি দীর্ঘ রেখাংশ নাও। P ও Q-কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে 3·5 সেমি ও 2 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত অঙ্কন কর। ঐ বৃত্ত দুটির সরল সাধারণ স্পর্শক দুটি অঙ্কন কর।

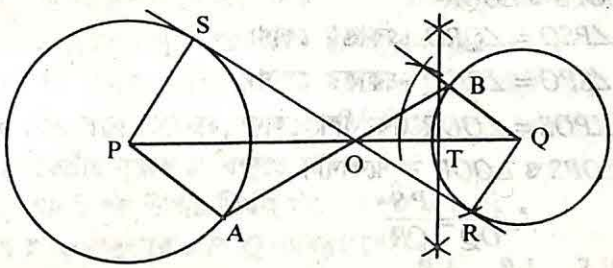
3. XY একটি 4 সেমি দীর্ঘ রেখাংশ নাও। X ও Y-কে কেন্দ্র করে 2 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত অঙ্কন কর। ঐ বৃত্ত দুটির সরল সাধারণ স্পর্শক দুটি অঙ্কন কর।

4. 3 সেমি বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন কর। ঐ বর্গক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দুগুলিকে কেন্দ্র করে 1·5 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট চারটি বৃত্ত অঙ্কন কর। পর পর অবস্থিত দু-দুটি করে বৃত্তের সেই চারটি সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন কর, যারা বর্গক্ষেত্রের বাইরে অবস্থিত।

সম্পাদ্য 10

দুটি বৃত্তের একটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন করতে হবে।

প্রথম পদ্ধতি ঃ



চিত্র নং: 218

ধরা যাক, দুটি বৃত্তের কেন্দ্র যথাক্রমে P ও Q.

ঐ দুটি বৃত্তের একটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কন ঃ P, Q যুক্ত করা হল। P-কেন্দ্রীয় বৃত্তের একটি ব্যাসার্ধ PA টানা হল। PQ-এর যেদিকে PA অবস্থিত তার বিপরীত দিকে PA-এর সমান্তরাল করে Q-কেন্দ্রীয় বৃত্তের একটি ব্যাসার্ধ QB অঙ্কন করা হল। A, B যুক্ত করা হল। AB ও PQ পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। OQ-এর মধ্যবিন্দু T-কে কেন্দ্র করে TQ-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করা হল, যা Q-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে R বিন্দুতে ছেদ করে। O, R যুক্ত করা হল এবং RO-কে বর্ধিত করা হল।

তাহলে OR সরলরেখাই উদ্দিষ্ট তির্যক সাধারণ স্পর্শক।

প্রমাণ ঃ Q, R যুক্ত করা হল এবং P থেকে OR সরলরেখার উপর লম্ব অঙ্কন করা হল, যা OR সরলরেখাকে S বিন্দুতে ছেদ করে।

অঙ্কনানুসারে, OR, Q-কেন্দ্রীয় বৃত্তের স্পর্শক।

আবার, $PA \parallel QB$ এবং AB ভেদক,

$\therefore \angle PAO = \angle QBO$ (একান্তর কোণ)।

অনুরূপভাবে, $\angle APO = \angle BQO$ (একান্তর কোণ)।

[$PA \parallel QB$ এবং PQ ভেদক]

$\therefore \Delta OPA$ ও ΔOQB-এর $\angle PAO = \angle QBO$

$\angle APO = \angle BQO$

এবং $\angle AOP = \angle BOQ$ (বিপ্রতীপ কোণ);

$\therefore \Delta OPA$ ও ΔOQB সদৃশকোণী।

$$\therefore \frac{OP}{OQ}=\frac{AP}{BQ}$$

আবার, PS ও QR, OR সরলরেখার উপর লম্ব ;

$\therefore PS \parallel QR$ এবং SR ও PQ ভেদক ।

$\therefore \Delta OPS$ ও ΔOQR-এর

$\angle PSO = \angle QRO$ (একান্তর কোণ),

$\angle SPO = \angle RQO$ (একান্তর কোণ),

$\angle POS = \angle QOR$ (বিপ্রতীপ কোণ) ;

$\therefore \Delta OPS$ ও ΔOQR সদৃশকোণী।

$$\therefore \frac{PO}{OQ}=\frac{PS}{QR}$$

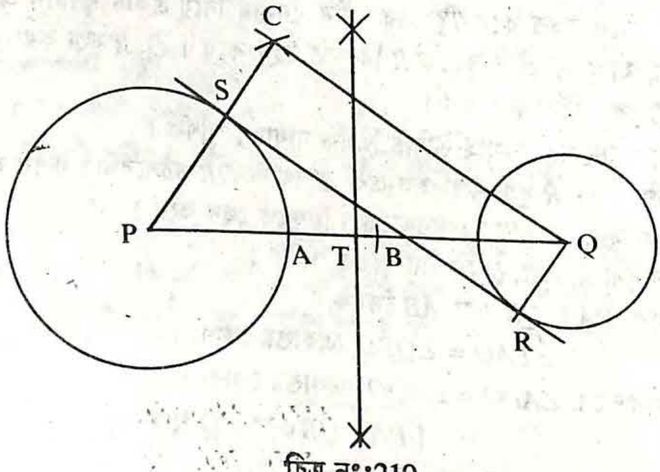
$\therefore \frac{PS}{QR}=\frac{AP}{BQ}=\frac{AP}{QR}$ [$BQ = QR$, $\because$ Q কেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ ।]

$\therefore PS = AP = P$-কেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ এবং $\angle PSR = 1$ সমকোণ ।

$\therefore OS, P$ কেন্দ্রীয় বৃত্তের স্পর্শক ।

$\therefore OR$, অর্থাৎ ROS, দুটি বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক এবং যেহেতু, বৃত্ত দুটি ROS-এর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত, সুতরাং, ROS একটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক ।

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ



চিত্র নং:219

ধরা যাক, দুটি বৃত্তের কেন্দ্র যথাক্রমে P ও Q.

এই দুটি বৃত্তের একটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন করতে হবে ।

অঙ্কন ঃ P, Q যুক্ত করা হল এবং PQ-এর মধ্যবিন্দু T নির্ণয় করা হল। মনে করি PQ, P-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে A বিন্দুতে ছেদ করে। AQ থেকে Q-কেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান করে AB অংশ কেটে নেওয়া হল। T বিন্দুকে কেন্দ্র করে TP-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে এবং P বিন্দুকে কেন্দ্র করে PB-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে যথাক্রমে দুটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করা হল। মনে করি, ঐ বৃত্তচাপ দুটি পরস্পরকে C বিন্দুতে ছেদ করে। P, C যুক্ত করা হ'ল, যা বৃত্তকে S বিন্দুতে ছেদ করে। C, Q যুক্ত করা হল। S বিন্দুকে কেন্দ্র করে CQ-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করা হল, যা Q-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে R বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে SR-ই হল উদ্দিষ্ট তির্যক সাধারণ স্পর্শক।

প্রমাণ ঃ অঙ্কনানুসারে, $\angle PCQ$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ ;

$\therefore \angle PCQ = 1$ সমকোণ।

আবার, $CS = PC - PS = PB - PA = AB = QR$ এবং $SR = CQ$ (অঙ্কনানুসারে) ;

$\therefore CQRS$ একটি সামান্তরিক, যার $\angle QCS = 1$ সমকোণ।

$\therefore CQRS$ একটি আয়তক্ষেত্র।

$\therefore \angle PSR$ এবং $\angle QRS$-এর প্রত্যেকেই 1 সমকোণ।

$\therefore SR \perp PS$ এবং $SR \perp QR$.

$\therefore SR$ দুটি বৃত্তেরই স্পর্শক, অর্থাৎ দুটি বৃত্তের তির্যক সাধারণ স্পর্শক।

মন্তব্য ঃ (1) অঙ্কন পদ্ধতির বিশ্লেষণ ঃ

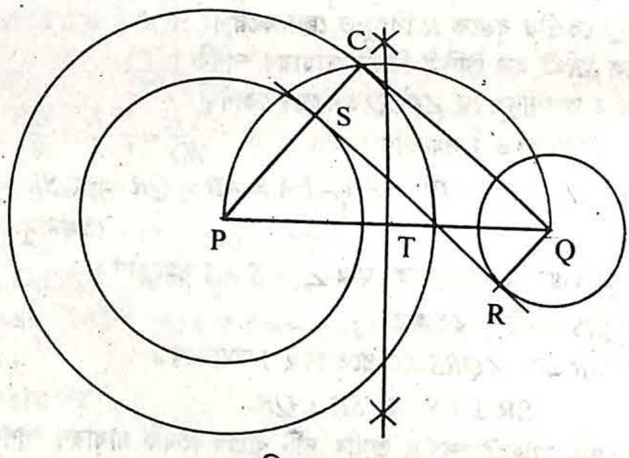
প্রথম পদ্ধতি ঃ এই পদ্ধতির বিশ্লেষণ সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কনের প্রথম পদ্ধতির বিশ্লেষণের মতই। কাজেই তার আর পুনরাবৃত্তি করা হল না।

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ

(পরের পৃষ্ঠায় 220 নং চিত্র লক্ষ কর)

মনে করি, তির্যক সাধারণ স্পর্শক SR, সুতরাং, $PS \perp SR$, $QR \perp SR$; সুতরাং, $PS \parallel QR$. $RS \parallel QC$ অঙ্কন করা হল। সুতরাং $CQRS$ আয়তক্ষেত্রে। এবার C বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করতে পারলেই S ও R বিন্দুর অবস্থান, অর্থাৎ SR সাধারণ স্পর্শকটি পাওয়া যাবে। আয়তক্ষেত্র $CQRS$ থেকে পাওয়া যায় $QR = CS$. সুতরাং, PC দুটি

ব্যাসার্ধের যোগফলের সমান এবং $\angle PCQ$ এক সমকোণ বলেই এটি PQ ব্যাসের উপর অবস্থিত অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। সুতরাং C বিন্দু হল দুটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের যোগফলের সমান ব্যাসার্ধবিশিষ্ট P-কেন্দ্রীয় একটি নতুন বৃত্ত এবং পূর্বোক্ত অর্ধবৃত্তের ছেদবিন্দু। সেজন্য C বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়ের জন্য ওই নতুন বৃত্তটি এবং অর্ধবৃত্তটি অঙ্কন করা প্রয়োজন। অপরিচ্ছন্নতা এড়াবার জন্য 219 নং চিত্রে নতুন বৃত্তটি এবং অর্ধবৃত্তটি পুরোপুরি অঙ্কন না করে দুটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করা হয়েছে।



চিত্র নং: 220

কেবল অঙ্কন করতে হলে C, Q যুক্ত না করলেও চলবে।

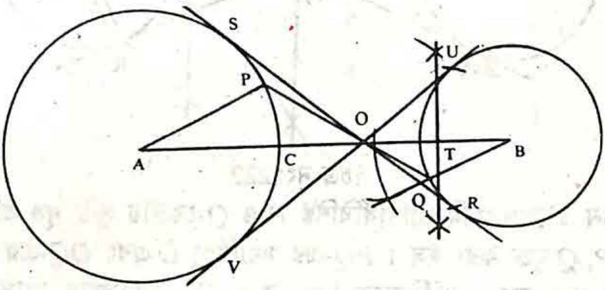
(2) বৃত্ত দুটি যদি বহিঃস্থভাবে পরস্পরকে স্পর্শ না করে অবস্থিত হয়, তাহলে আরও একটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন করা যায়, অর্থাৎ সেক্ষেত্রে বৃত্ত দুটির দুটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

(3) বৃত্ত দুটি পরস্পরচ্ছেদী হলে, তির্যক সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন করা যাবে না।

(4) বৃত্ত দুটি বহিঃস্থভাবে বা অন্তঃস্থভাবে পরস্পরকে স্পর্শ করলে একটি সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন করা যাবে এটা আমরা পূর্বেই ধরে নিয়েছি। ঐ সাধারণ স্পর্শকটিকে আমরা প্রথমক্ষেত্রে তির্যক সাধারণ স্পর্শক এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে সরল সাধারণ স্পর্শক বলতে পারি এবং বৃত্ত দুটির স্পর্শবিন্দুতে বৃত্ত দুটির কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার উপর লম্বই হল ঐ সাধারণ স্পর্শক।]

কয়েকটি প্রয়োগ ঃ

1. AB একটি 8 সেমি দীর্ঘ রেখাংশ নাও । A ও B বিন্দুকে কেন্দ্র করে যথাক্রমে 3 সেমি ও 2 সেমি ব্যাসার্ধের দুটি বৃত্ত অঙ্কন কর । ঐ বৃত্ত দুটির তির্যক সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন কর ।



চিত্র নং: 221

অঙ্কন ঃ AB একটি 8 সেমি দীর্ঘ রেখাংশ নেওয়া হল । A বিন্দুকে কেন্দ্র করে 3 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট এবং B বিন্দুকে কেন্দ্র করে 2 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্ত অঙ্কন করা হল । A-কেন্দ্রীয় বৃত্তে AP একটি ব্যাসার্ধ টানা হল । AP-এর সামান্তরাল করে B কেন্দ্রীয় বৃত্তের একটি ব্যাসার্ধ BQ অঙ্কন করা হল যাতে P ও Q, AB সরলরেখার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হয় । PQ যুক্ত করা হল যা AB-কে O বিন্দুতে ছেদ করে । OB-এর মধ্যবিন্দু T নির্ণয় করা হল। T বিন্দুকে কেন্দ্র করে TB-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করা হল, যা B-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে R বিন্দুতে ছেদ করে । R, O যুক্ত করে বর্ধিত করা হল, যা A-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে S বিন্দুতে স্পর্শ করে ।

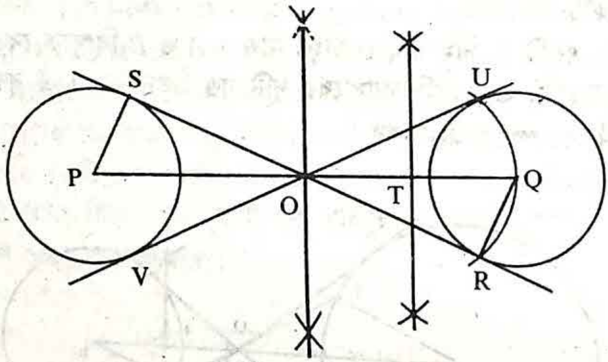
তাহলে বৃত্ত দুটির একটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক RS অঙ্কন করা হল ।

আবার, O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OR-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করা হল, যা B-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে U বিন্দুতে ছেদ করে । U, O যুক্ত করে বর্ধিত করা হল, যা A-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে V বিন্দুতে স্পর্শ করে ।

সুতরাং UV হল দ্বিতীয় তির্যক সাধারণ স্পর্শক ।

(অঙ্কন প্রণালীর যৌক্তিকতা দেখাও ।)

2. দুটি 2·5 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্ত অঙ্কন কর । ঐ বৃত্ত দুটির তির্যক সাধারণ স্পর্শক দুটি অঙ্কন কর ।



চিত্র নং:222

অঙ্কন ঃ 2·5 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট P ও Q-কেন্দ্রীয় দুটি বৃত্ত অঙ্কন করা হল। P, Q যুক্ত করা হল। PQ-এর মধ্যবিন্দু O এবং OQ-এর মধ্যবিন্দু T নির্ণয় করা হল। T বিন্দুকে কেন্দ্র করে TQ-এর সমান ব্যাসার্ধ বিন্দুতে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করা হল, যা Q-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে R এবং U বিন্দুতে ছেদ করে। R, O এবং U, O যুক্ত করে বর্ধিত করা হল, যারা P-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে যথাক্রমে S ও V বিন্দুতে স্পর্শ করে।

তাহলে, বৃত্ত দুটির তির্যক সাধারণ স্পর্শক দুটি RS এবং UV অঙ্কন করা হল।

প্রমাণ ঃ $\because$ T বিন্দু OQ-এর মধ্যবিন্দু

$\therefore \angle ORQ = 1$ সমকোণ।

$\therefore QR \perp OR$.

RO সরলরেখা Q-কেন্দ্রীয় বৃত্তের স্পর্শক।

এবার, RO সরলরেখার উপর P বিন্দু থেকে PS লম্ব আঁকা হল।

ΔPOS ও ΔQOR-এর

$\angle POS = \angle QOR$ (বিপ্রতীপ কোণ)

$\angle PSO = \angle QRO$ (প্রত্যেকেই 1 সমকোণ)

$OP = OQ$ ($\because$ O, PQ-এর মধ্যবিন্দু)।

$\therefore \Delta POS \cong \Delta QOR$

$\therefore PS = QR = P$-কেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

$\because$ দুটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ সমান,

$\therefore RO$, অর্থাৎ ROS সরলরেখা P-কেন্দ্রীয় বৃত্তেরও স্পর্শক।

$\therefore ROS$ সরলরেখা দুটি বৃত্তের তির্যক সাধারণ স্পর্শক। অনুরূপে, UOV সরলরেখাও দুটি বৃত্তের অপর তির্যক সাধারণ স্পর্শক।

অনুশীলনী 33

1. 4 সেমি ও 2·5 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত অঙ্কন কর, যাদের কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব 7·5 সেমি। ঐ বৃত্ত দুটির দুটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন কর।

2. 3 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত অঙ্কন কর, যাদের কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব 10 সেমি। ঐ বৃত্ত দুটির একটি সরল ও একটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন কর ও ঐ সাধারণ স্পর্শক দুটির দৈর্ঘ্য স্কেলের সাহায্যে নির্ণয় কর।

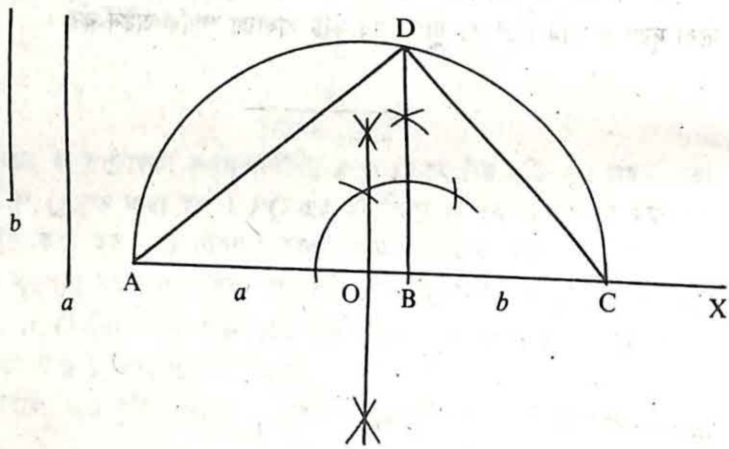
3. 4·4 সেমি ও 1·6 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত অঙ্কন কর, যাদের কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব 6 সেমি। ঐ বৃত্ত দুটির সব কটি সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন কর।

4.4 মধ্য-সমানুপাতী অঙ্কন ঃ

সম্পাদ্য 11

দুটি রেখাংশের মধ্য-সমানুপাতী অঙ্কন করতে হবে।

প্রথম পদ্ধতি ঃ



চিত্র নং:223

ধরা যাক, a ও b দুটি রেখাংশ।

এই দুটি রেখাংশের মধ্য-সমানুপাতী অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কন ঃ যেকোনো একটি সরলরেখা AX নেওয়া হল।

AX থেকে a রেখাংশের সমান করে AB অংশ এবং BX থেকে b রেখাংশের সমান করে BC অংশ কেটে নেওয়া হল। AC-কে ব্যাস করে একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করা হল। B বিন্দুতে BC-এর উপর লম্ব অঙ্কন করা হল, যা অর্ধবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে BD-ই হল নির্ণেয় মধ্য-সমানুপাতী।

প্রমাণ ঃ A, D ও C, D যুক্ত করা হল।

$\because \angle ADC$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ,

$\therefore \angle ADC = 1$ সমকোণ।

$\therefore ADC$ সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু D থেকে DB, BC-এর উপর লম্ব।

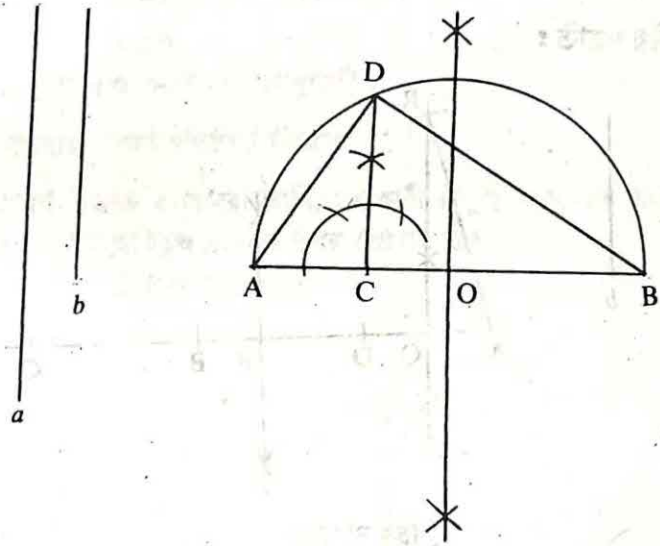
$\therefore \Delta ABD$ ও ΔCBD সদৃশকোণী

$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BC}$

$\therefore BD^2 = AB.AC = a.b$

$\therefore BD$, a ও b এর মধ্য-সমানুপাতী।

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ



চিত্র নং:224

ধরা যাক a ও b-দুটি রেখাংশ।

এই দুটি রেখাংশের মধ্য-সমানুপাতী অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কন ঃ a রেখাংশের সমান করে AB একটি রেখাংশ নেওয়া হল। BA থেকে b-এর সমান করে BC অংশ কেটে নেওয়া হল। AB-এর উপর একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করা হল। C বিন্দুতে AB-এর উপর লম্ব অঙ্কন করা হল, যা অর্ধবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে BD-ই হল নির্ণেয় মধ্য-সমানুপাতী।

প্রমাণ ঃ A, D ও B, D যুক্ত করা হল।

$\because \angle ADB$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ,

$\therefore \angle ADB = 1$ সমকোণ।

∴ সমকোণী ত্রিভুজ ADB-এর সমকৌণিক বিন্দু D থেকে DC, AB-এর উপর লম্ব।

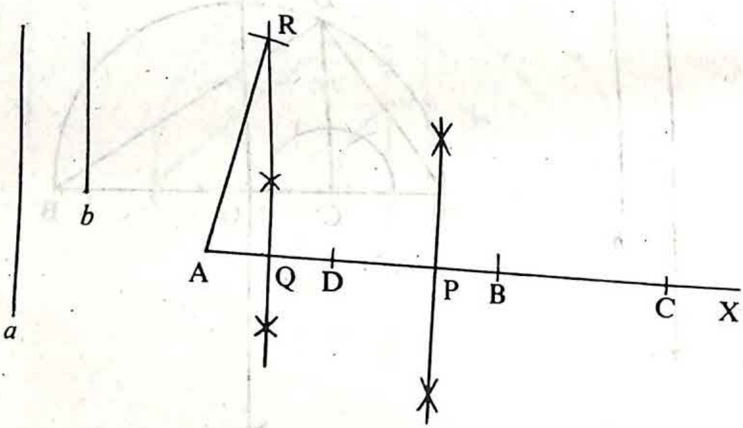
$$\therefore \Delta ABD \text{ ও } \Delta BCD \text{ সদৃশকোণী।}$$

$$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BC}$$

$$\therefore BD^2 = AB.\,BC = a.b.$$

∴ BD, a ও b এর মধ্য-সমানুপাতী।

তৃতীয় পদ্ধতি ঃ



চিত্র নং:225

ধরা যাক, a ও b দুটি রেখাংশ।

এই দুটি রেখাংশের মধ্য-সমানুপাতী অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কন ঃ যেকোনো একটি সরলরেখা AX নেওয়া হল। AX থেকে a রেখাংশের সমান করে AB অংশ কেটে নেওয়া হল। B বিন্দুর উভয় পার্শ্বেই ঐ সরলরেখা থেকে b রেখাংশের সমান করে BC ও BD অংশ কেটে নেওয়া হল। AC ও AD-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন করা হল, যারা AX সরলরেখাকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করল। A বিন্দুকে কেন্দ্র করে AP-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করা হল, যা AD-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডককে R বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে QR-ই হল নির্ণেয় মধ্য-সমানুপাতী।

প্রমাণ ঃ A, R যুক্ত করা হল।

$$\because QR, AD\text{-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক,}$$

$\therefore \Delta AQR$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

$\therefore QR^2 = AR^2 - AQ^2$

$= AP^2 - AQ^2$

$= \left(\frac{AC}{2}\right)^2 - \left(\frac{AD}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{AB + BC}{2}\right)^2 - \left(\frac{AB - BD}{2}\right)^2$

$= AB.BC\ (\because BD = BC)$

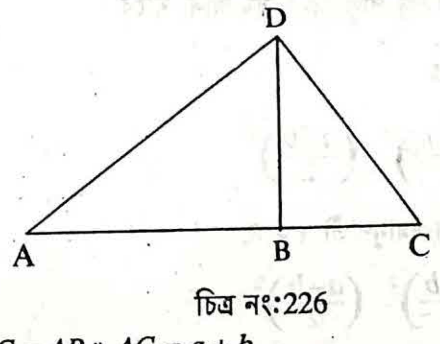
$= a.b.$

$\therefore QR, a$ ও b-এর মধ্য-সমানুপাতী।

[মন্তব্যঃ অঙ্কন পদ্ধতির বিশ্লেষণঃ

প্রথম পদ্ধতি ঃ আমরা জানি, সমকোণী ত্রিভুজ ADC-এর সমকৌণিক বিন্দু D থেকে অতিভুজ AC-এর উপর DB লম্ব হলে,

$DB^2 = AB.BC = a.\ b.$



চিত্র নং:226

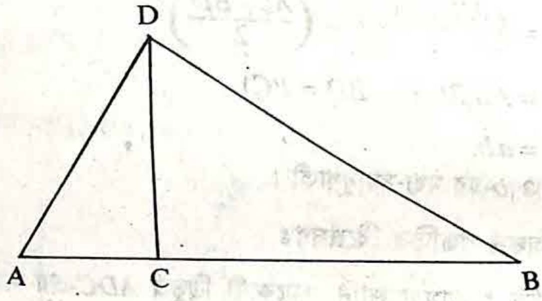
আবার, $AC = AB + AC = a + b$

$\therefore AC$ সরলরেখাকে a ও b রেখাংশের সমষ্টি হিসাবে নিলে B বিন্দু পাওয়া যাবে। এবার D বিন্দু পাওয়া গেলেই DB মধ্য-সমানুপাতীটি পাওয়া যাবে। যেহেতু $\angle ADC = 1$ সমকোণ, সুতরাং D বিন্দু AC-এর উপর অঙ্কিত অর্ধবৃত্তের উপর অবস্থিত। আবার, B বিন্দুতে AC-এর উপর লম্ব অঙ্কন করলে, D বিন্দু তার উপরও অবস্থিত হবে। সুতরাং D বিন্দু AC-এর উপর অর্ধবৃত্ত ও ঐ সরলরেখার উপর B বিন্দুতে অঙ্কিত লম্বের ছেদবিন্দু। এ থেকেই অঙ্কন পদ্ধতিটি বোঝা যাবে।

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ আমরা জানি সমকোণী ত্রিভুজ ADB-এর সমকৌণিক বিন্দু D থেকে AB-এর উপর DC লম্ব হলে,

$$BD^2 = AB.\,BC = a.\,b.$$

আবার, $AC = AB - BC = a - b$



চিত্র নং:227

$\therefore AC$ হল a ও b এর বিয়োগফল। এভাবে C বিন্দুটি পাওয়া যাবে। এবার D বিন্দু পেলেই BD মধ্য-সমানুপাতী পাওয়া যাবে। পূর্ব পদ্ধতির বিশ্লেষণ থেকেই D বিন্দু পাওয়ার নিয়ম জানা যাবে।

তৃতীয় পদ্ধতি ঃ

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$\therefore a, b$-এর মধ্য-সমানুপাতী x হলে,

$$x^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

বা, $x^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

$\therefore x, \frac{a-b}{2}, \frac{a+b}{2}$ একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহু, যার অতিভুজ $\frac{a+b}{2}$ ও অপর একটি বাহু $\frac{a-b}{2}$ জানা আছে।

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজটি অঙ্কন করলেই x, অর্থাৎ মধ্য-সমানুপাতী পাওয়া যাবে।

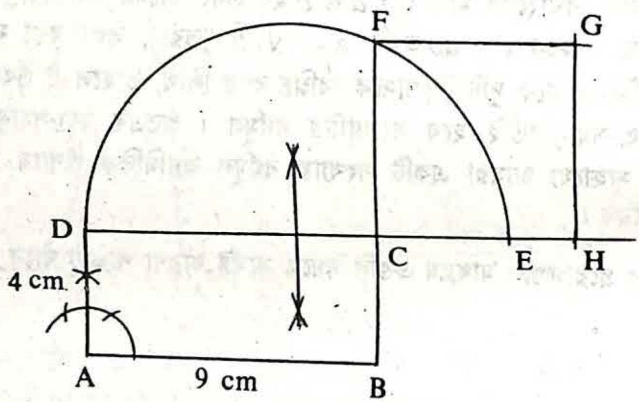
(2) আমরা a ও b রেখাংশের মধ্য-সমানুপাতী নির্ণয় করতে শিখেছি। এর অর্থ হল, আমরা এমন একটি বর্গক্ষেত্রের বাহু নির্ণয় করতে শিখলাম, যার ক্ষেত্রফল a ও b সন্নিহিত বাহুবিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান। সুতরাং, এই পদ্ধতির সাহায্যে একটি আয়তক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করতে পারব।

(3) দুটি রেখাংশের মান যদি a ও b হয় এবং তাদের মধ্য-সমানুপাতী যদি x হয়, তাহলে $x^2 = ab$ অর্থাৎ $x = \sqrt{ab}$. সুতরাং, লক্ষ্য করা যাচ্ছে, যদি একটি সংখ্যাকে দুটি উৎপাদকে বিশ্লিষ্ট করে লিখি, তাহলে ঐ উৎপাদক দুটির মধ্য-সমানুপাতীই হবে সংখ্যাটির বর্গমূল। অতএব মধ্য-সমানুপাতী নির্ণয়ের সাহায্যে আমরা একটি সংখ্যার বর্গমূল জ্যামিতিক উপায়ে নির্ণয় করতে পারব।

পরের প্রয়োগগুলি মাধ্যমে এগুলি সম্বন্ধে যথেষ্ট ধারণা পাওয়া যাবে।]

কয়েকটি প্রয়োগ ঃ

1. 9 সেমি দৈর্ঘ্য ও 4 সেমি প্রস্থবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন কর।



চিত্র নং:228

অঙ্কন ঃ 9 সেমি দৈর্ঘ্য ও 4 সেমি প্রস্থবিশিষ্ট *ABCD* আয়তক্ষেত্রটি অঙ্কন করা হল। *DC*-কে বর্ধিত করা হল এবং বর্ধিত অংশ থেকে *CB*-এর সমান করে *CE* অংশ কেটে নেওয়া হল। *DE*-এর উপর একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করা হল। *BC*-কে বর্ধিত করা হল, যা অর্ধবৃত্তকে *F* বিন্দুতে ছেদ করে। *CF*-কে বাহু করে *CFGH* বর্গক্ষেত্রটি অঙ্কন করা হল।

তাহলে *CFGH*-ই হল উদ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র।

প্রমাণ ঃ অঙ্কনানুসারে, *ABCD* হল প্রদত্ত আয়তক্ষেত্র। আবার, $\because \angle BCD = 1$ সমকোণ,

$\therefore CF, DE$-এর উপর লম্ব।

$\therefore$ অঙ্কনানুসারে, CF, DC ও CE-এর মধ্য-সমানুপাতী।

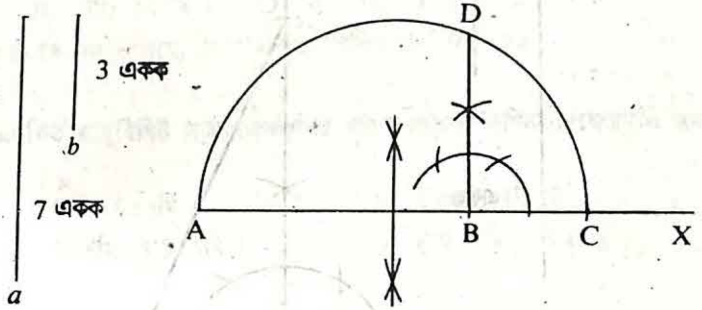
$\therefore CF^2 = DC.CE$

$= AB.BC$

= আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

2. জ্যামিতিক উপায়ে $\sqrt{21}$-এর মান নির্ণয় কর, অথবা, জ্যামিতিক উপায়ে 21-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

প্রথম পদ্ধতি ঃ



চিত্র নং: 229

অঙ্কন ঃ a ও b দুটি রেখাংশ নেওয়া হল, যাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 7 একক এবং 3 একক। AX সরলরেখা থেকে a ও b-এর সমান করে একই দিকে যথাক্রমে AB ও BC অংশ কেটে নেওয়া হল।

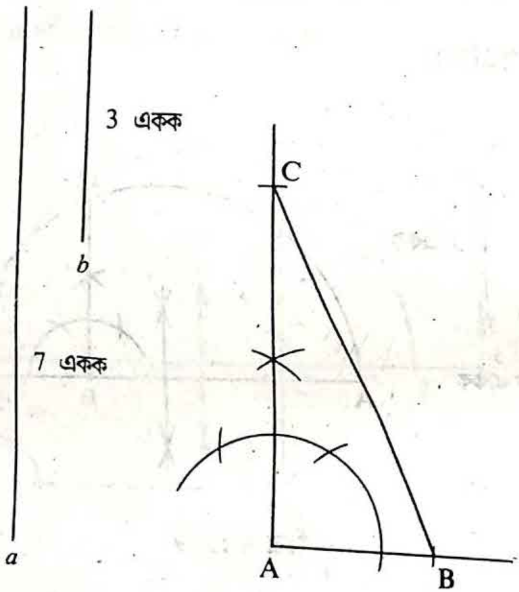
AB ও BC-এর মধ্য-সমানুপাতী BD অঙ্কন করা হল।

তাহলে, BD রেখাংশের দৈর্ঘ্যই হচ্ছে $\sqrt{21}$-এর মান, অথবা 21-এর বর্গমূল। স্কেলের সাহায্যে মেপে দেখা যাচ্ছে, $BD = 4{\cdot}6$ একক (প্রায়)।

প্রমাণ ঃ $\because$ BD, AB ও BC-এর মধ্য-সমানুপাতী,

$$\therefore BD^2 = AB.BC$$
$$= a.b$$
$$= 7.3$$
$$= 21$$
$$\therefore BD = \sqrt{21}$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ



চিত্র নং: 230

অঙ্কন ঃ ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করা হল, যার AB বাহু = 2 একক এবং অতিভুজ $BC = 5$ একক।

তাহলে AC-এর দৈর্ঘ্য হল $\sqrt{21}$.

স্কেলের সাহায্যে মেপে দেখা যাচ্ছে, $AC = 4{\cdot}6$ একক (প্রায়)।

প্রমাণ ঃ $\because \Delta ABC$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ,

$$\therefore AC^2 = BC^2 - AB^2.$$
$$= 5^2 - 2^2$$
$$= 25 - 4$$
$$= 21.$$
$$\therefore AC = \sqrt{21}$$

[মন্তব্য ঃ একই পদ্ধতিতে $\sqrt{21}$ বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রও অঙ্কন করা যেত। সেক্ষেত্রে AC-কে বাহু করে একটি অঙ্কন করতে হতো।]

অনুশীলনী 34

(প্রতি ক্ষেত্রে অঙ্কনপ্রণালী লিখবে ও প্রমাণ দেবে ।)

1. নিম্নলিখিত দৈর্ঘ্যের রেখাংশগুলির মধ্য-সমানুপাতী অঙ্কন কর ঃ

i) 4·5 সেমি, 2 সেমি । *ii)* 4 সেমি, 3 সেমি ।

iii) 8 সেমি, 4 সেমি । *iv)* 16 সেমি, 2 সেমি ।

v) 10 সেমি, 3 সেমি । *vi)* 12 সেমি, 3 সেমি ।

প্রতিক্ষেত্রে স্কেলের সাহায্যে মধ্য-সমানুপাতীগুলির মান নির্ণয় কর ।

2. নিম্নলিখিত বাহুবিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রগুলির সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রগুলি অঙ্কন কর ঃ

i) 8 সেমি, 6 সেমি । *ii)* 5 সেমি, 3 সেমি ।

iii) 4·2 সেমি, 3·5 সেমি । *iv)* 8·9 সেমি, 3·1 সেমি ।

3. জ্যামিতিক উপায়ে নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির বর্গমূল নির্ণয় কর ঃ

i) 7 *ii)* 15 *iii)* 12 *iv)* 18 *v)* 24 *vi)* 30

4. নিম্নলিখিত বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রগুলি অঙ্কন কর ঃ

i) $\sqrt{8}$ *ii)* $\sqrt{11}$ *iii)* $\sqrt{14}$ *iv)* $\sqrt{22}$ *v)* $\sqrt{27}$ *vi)* $\sqrt{28}$

5. নিম্নলিখিত ত্রিভুজগুলির সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রগুলি অঙ্কন কর ঃ

i) ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 10 সেমি, 7 সেমি ও 5 সেমি ।

ii) একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, যার ভূমির দৈর্ঘ্য 6 সেমি এবং সমান বাহু দুটির প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 5 সেমি ।

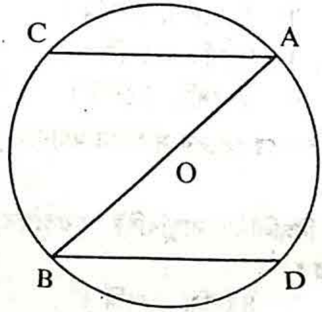
iii) একটি সমবাহু ত্রিভুজ, যার বাহুর দৈর্ঘ্য 7 সেমি ।

বিবিধ প্রশ্নমালা 7

প্রয়োজনবোধে গণনার সাহায্য নাও। প্রতিক্ষেত্রে তোমার উত্তরের সমর্থনে যুক্তি দাও।

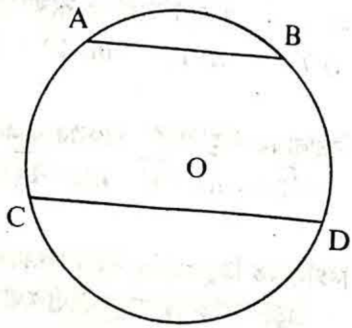
1. চিত্র নং 231-এ AB ব্যাস। $AC \parallel DB$. $AC = 4$ সেমি, $BD =$ কত ?

O, বৃত্তের কেন্দ্র হলে, CD রেখাংশ O বিন্দু দিয়ে যাবে কি ?



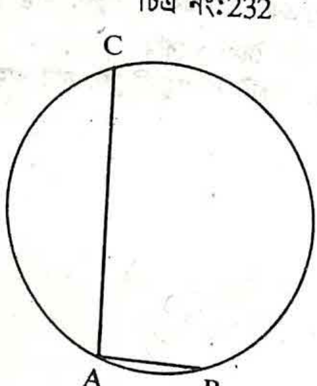
চিত্র নং:231

2. চিত্র নং 232-এ $AB \parallel CD$; $OA = 5$ সেমি, $AB = 6$ সেমি, $CD = 8$ সেমি। AB ও CD-এর মধ্যে দূরত্ব কত ?



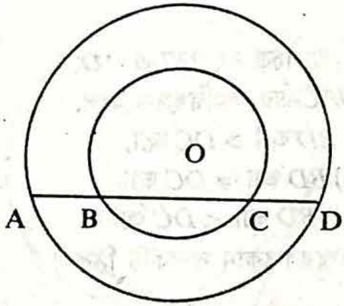
চিত্র নং:232

3. চিত্র নং 233-এ $AB \perp AC$ এবং $AB = 5$ সেমি, $AC=12$ সেমি। বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত ?



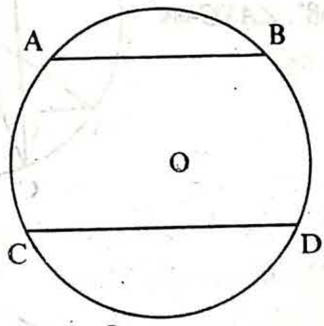
চিত্র নং:233

4. চিত্র নং 234-এ বৃত্ত দুটি এককেন্দ্রীয় । $AB = 2$ সেমি হলে, $CD =$ কত ?



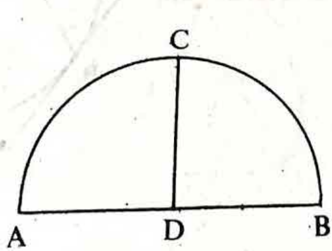
চিত্র নং:234

5. চিত্র নং 235-এ $AB \parallel CD$; $AB = 10$ সেমি, $CD = 24$ সেমি, AB ও CD-এর মধ্যে দূরত্ব 17 সেমি ; বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত ?



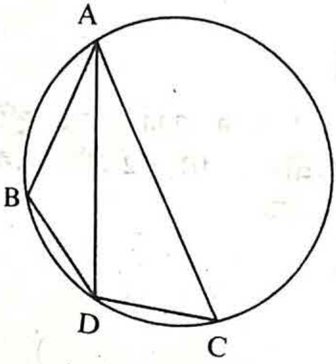
চিত্র নং:235

6. চিত্র নং 236-এ ACB বৃত্তচাপের C মধ্যবিন্দু । $CD \perp AB$, $CD = 2$ সেমি, $AB = 12$ সেমি হলে, বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত ?



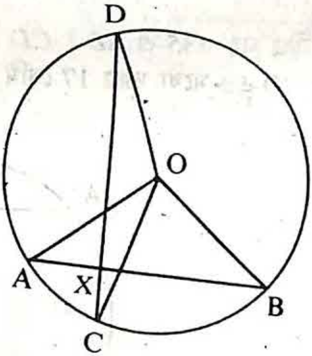
চিত্র নং:236

7. চিত্র নং 237-এ AD, BAC-এর সমদ্বিখণ্ডক হলে,
i) BD জ্যা $> DC$ জ্যা,
ii) BD জ্যা $= DC$ জ্যা,
iii) BD জ্যা $< DC$ জ্যা ।
উপরের কোন সম্পর্কটি ঠিক ?



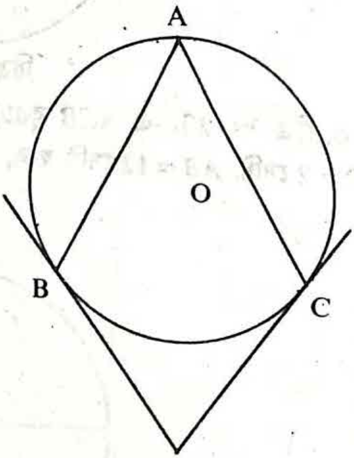
চিত্র নং:237

8. চিত্র নং 238-এ $\angle AOD = 110^\circ$, $\angle BOC = 68^\circ$. $\angle AXC$-এর মান কত ?

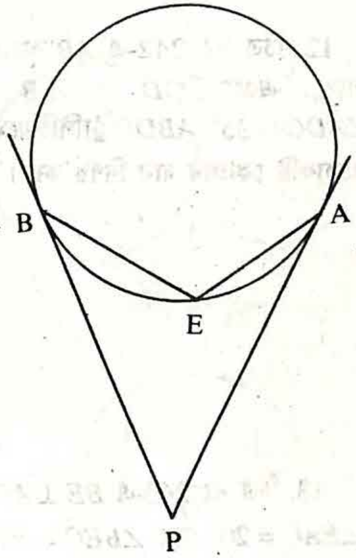


চিত্র নং:238

9. চিত্র নং 239-এ $\angle BAC = 55^\circ$; BD ও CD যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে স্পর্শক । $\angle BDC$-এর মান কত ?



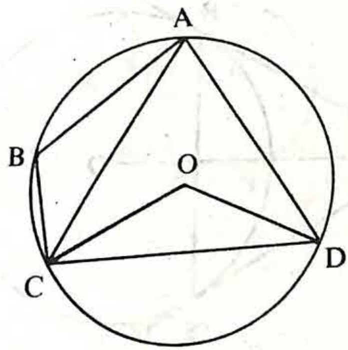
চিত্র নং:239



চিত্র নং:240

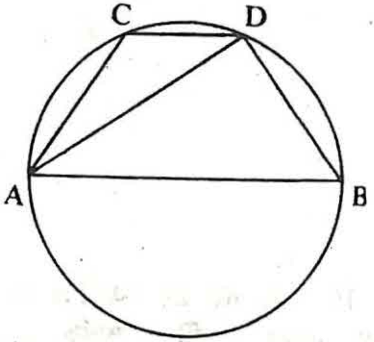
10. চিত্র নং 240-এ PA ও PB বৃত্তের দুটি স্পর্শক। $\angle APB = 48^\circ$ হলে, $\angle AEB$-এর মান কত ?

11. চিত্র নং 241-এ O বিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র এবং $ABCD$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। $\angle COD = 130^\circ$, $\angle BAC = 25^\circ$ এবং $\angle BCA = 40^\circ$ হলে, $\angle BCD$ ও $\angle ADC$-এর মান কত ?



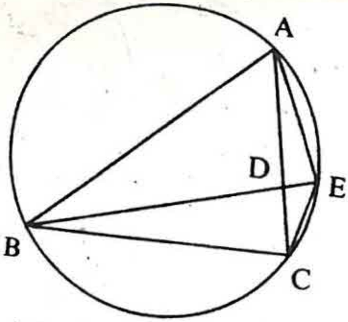
চিত্র নং:241

12. চিত্র নং 242-এ AB বৃত্তের ব্যাস এবং $CD \parallel AB$, $\angle ADC = 35^\circ$. $ABDC$ ট্রাপিজিয়মের প্রত্যেকটি কোণের মান নির্ণয় কর।



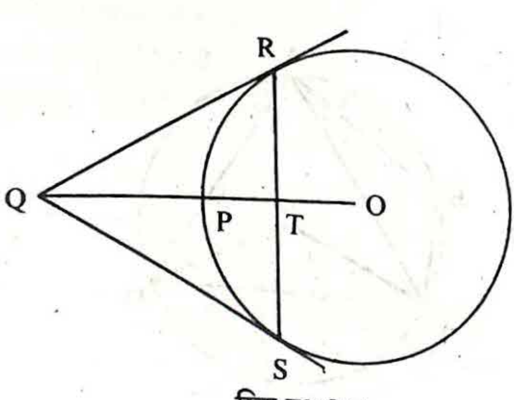
চিত্র নং:242

13. চিত্র নং 243-এ $BE \perp AC$ $\angle EAC = 20^\circ$ এবং $\angle BEC = 60^\circ$ হলে, ΔBAC ও ΔAEC-এর প্রতিটি কোণের মান নির্ণয় কর।



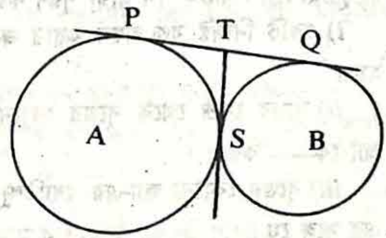
চিত্র নং:243

14. চিত্র নং 244-এ $OP = 6$ সেমি, $PQ = 4$ সেমি, QR ও QS দুটি স্পর্শক এবং O বিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র। $QS, QR, RS,$ ও OT রেখাংশগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।



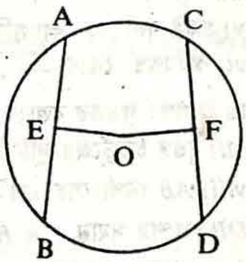
চিত্র নং:244

15. চিত্র নং 245-এ A ও B-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত দুটি S বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। PQ ও ST সাধারণ স্পর্শক। A-কেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 9 সেমি ও B-কেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 4 সেমি। PQ ও ST-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।



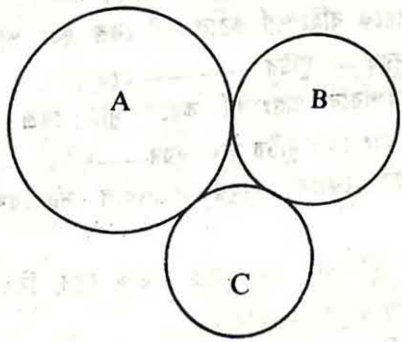
চিত্র নং:245

16. চিত্র নং 246-এ O বিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র এবং $OE \perp AB$, $OF \perp CD$, $OE = OF$. $AE = 2{\cdot}5$ সেমি হলে, CD রেখাংশের দৈর্ঘ্য কত ?



চিত্র নং:246

17. চিত্র নং 247-এ A, B ও C কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত তিনটি পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করেছে। বৃত্ত তিনটির ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 3 সেমি, $2{\cdot}8$ সেমি ও $1{\cdot}2$ সেমি। ΔABC-এর বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর এবং তা থেকে বল ত্রিভুজটি কোন ধরনের ত্রিভুজ ?



চিত্র নং:247

বিবিধ প্রশ্নমালা 8

1. শূন্যস্থানগুলি সঠিক শব্দ দ্বারা পূরণ কর ঃ

i) একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত অঙ্কন করার জন্য ন্যূনপক্ষে——অসমরেখ বিন্দুর প্রয়োজন হয়।

ii) বৃত্তের কেন্দ্র থেকে বৃত্তের কোনো জ্যা-এর উপর লম্ব অঙ্কন করলে, লম্বটি জ্যা-কে——করবে।

iii) বৃত্তের কোনো জ্যা-এর মধ্যবিন্দু ও বৃত্তের কেন্দ্রের সংযোজক রেখাংশ জ্যা-এর সঙ্গে যে কোণ উৎপন্ন করে তার মান——।

iv) কোনো বৃত্তের একই চাপের উপর অবস্থিত পরিধিস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের——।

v) একই বৃত্তাংশস্থ কোণগুলি পরস্পর——।

vi) অর্ধবৃত্তস্থ কোণ——, অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ——এবং অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশস্থ কোণ——।

vii) বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের দুটি বিপরীত কোণ পরস্পর——।

viii) AB রেখাংশের একই পার্শ্বে C ও D বিন্দু অবস্থিত এবং $\angle ACB$ ও $\angle ADB$ পরস্পর সমান। A, B, C, D বিন্দু চারটি——হবে।

ix) $ABCD$ চতুর্ভুজের $\angle ABC$ ও $\angle ADC$ এর সমষ্টি $180°$; ABCD চতুর্ভুজটি——চতুর্ভুজ হবে।

x) কোনো বৃত্তের একটি স্পর্শক ও স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ পরস্পর——অবস্থিত।

xi) বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে যে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায়, তারা পরস্পর——, তারা কেন্দ্রে যে দুটি কোণ উৎপন্ন করে তারা পরস্পর——, ওই বহিঃস্থ বিন্দু ও কেন্দ্রের সংযোজক সরলরেখা স্পর্শক দুটির অন্তর্ভুত কোণের——এবং ওই সংযোজক স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা-কে —— —— করে।

xii) দুটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করলে দুটি কেন্দ্র এবং স্পর্শবিন্দু——হবে এবং কেন্দ্র দুটির মধ্যে দূরত্ব——দুটির —— —— হবে।

xiii) দুটি বৃত্ত পরস্পরকে অন্তঃস্পর্শ করলে দুটি কেন্দ্র এবং স্পর্শবিন্দু একই——অবস্থিত হবে এবং কেন্দ্র দুটির মধ্যে দূরত্ব——দুটির——হবে।

xiv) কোনো ত্রিভুজের কোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অপর বাহু দুটিকে——বিভক্ত করে।

xv) কোনো ত্রিভুজের দুটি বাহু সমানুপাতে বিভক্ত হলে, বিভাজনবিন্দু দুটির সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর——হবে।

xvi) দুটি সদৃশকোণী ত্রিভুজের——বাহুগুলি——হবে।

xvii) দুটি ত্রিভুজের বাহুগুলি——হলে, ত্রিভুজ দুটি——হবে।

xviii) কোনো সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু থেকে অতিভুজের উপর লম্ব অঙ্কন করলে যে দুটি ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তাদের প্রত্যেকটি মূল ত্রিভুজের সঙ্গে——এবং তারা——পরস্পর—— ।

xix) কোনো সমকোণী ত্রিভুজের——উপর বর্গ অপর দুই বাহুর উপর——।

xx) কোনো ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহুর উপর বর্গ অপর দুই বাহুর উপর বর্গের সমষ্টির সমান হলে, বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কোণ—— ।

2. সঠিক শব্দ দ্বারা শূন্যস্থান পূরণ কর ঃ

i) কোনো বৃত্তচাপের উপর অবস্থিত একটি পরিধিস্থ কোণের সমদ্বিখণ্ডক বৃত্তচাপকে——করবে ।

ii) কোনো বৃত্তচাপের উপর অবস্থিত সকল পরিধিস্থ কোণের সমদ্বিখণ্ডকগুলি ——এবং ঐ বৃত্তের——অবস্থিত হবে ।

iii) বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ম——ট্রাপিজিয়ম হবে ।

iv) বৃত্তস্থ সামান্তরিক——হবে ।

v) বৃত্তস্থ বর্গক্ষেত্রের কর্ণ বৃত্তের——হবে ।

vi) বৃত্তের কোনো ব্যাসের প্রান্তবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটি——হবে ।

vii) দুটি পরস্পরছেদী বৃত্তের সাধারণ জ্যা বৃত্ত দুটির কেন্দ্র সংযোজক সরলরেখা দ্বারা—— —— হয় ।

viii) দুটি বৃত্তের দুটি সরল সাধারণ স্পর্শক দৈর্ঘ্যে——হয় ।

ix) দুটি অসমান্তরাল রেখাংশ যদি কোনো একটি বৃত্তের জ্যা হয়, তাহলে ঐ রেখাংশ দুটির —— —— —— হবে ওই বৃত্তের কেন্দ্র ।

x) দুটি পরস্পরছেদী সরলরেখা যদি কোনো একটি বৃত্তের স্পর্শক হয়, তাহলে সরলরেখা দুটির অন্তর্ভূত কোণের——বৃত্তটির কেন্দ্র দিয়ে যাবে ।

3. যে বিবৃতিগুলি শুদ্ধ তাদের প্রশ্নসংখ্যাগুলি খাতায় লিখে তাদের পাশে '√' চিহ্ন দাও এবং যেগুলি অশুদ্ধ সেগুলি শুদ্ধ করে লেখ ঃ

i) যেকোনো তিনটি বিন্দু দিয়ে একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কন করা যাবে ।

ii) বৃত্তের কোনো ব্যাসের সঙ্গে লম্বভাবে অবস্থিত কোন জ্যা ব্যাস দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হবে ।

iii) কোনো বৃত্তের কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ হবে ।

iv) সদৃশকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলি সমানুপাতী ।

v) বৃত্তের কোনো ব্যাসার্ধের প্রান্তবিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব ঐ বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক হবে ।

vi) বৃত্তের উপরে অবস্থিত যেকোনো দুটি বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটি অবশ্যই পরস্পরকে ছেদ করবে।

vii) তিনটি সর্বসম বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করলে, তাদের কেন্দ্রগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হবে।

viii) কোনো বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শক দুটি পরস্পর লম্ব হলে, কেন্দ্র, একটি স্পর্শবিন্দু, বহিঃস্থ বিন্দু ও অপর স্পর্শবিন্দু ক্রমানুসারে যুক্ত করলে একটি বর্গক্ষেত্র গঠন করবে।

ix) দুটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে, ত্রিভুজ দুটি সদৃশ হবে।

x) কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজকে ব্যাস করে অঙ্কিত বৃত্ত অবশ্যই সমকৌণিক বিন্দু দিয়ে যাবে।

বিবিধ প্রশ্নমালা 9

1. *ABC* একটি ত্রিভুজ। ঐ ত্রিভুজের বাহুগুলির সঙ্গে ওই ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সম্পর্ক কি ? ওই সম্পর্ক থেকে বলতো, কিভাবে ওই বৃত্তের কেন্দ্র পাওয়া যাবে এবং ওই বৃত্তের ব্যাসার্ধই বা কি হবে ? এবার যেকোনো একটি ত্রিভুজ *ABC* অঙ্কন করে তার পরিবৃত্ত অঙ্কন কর।

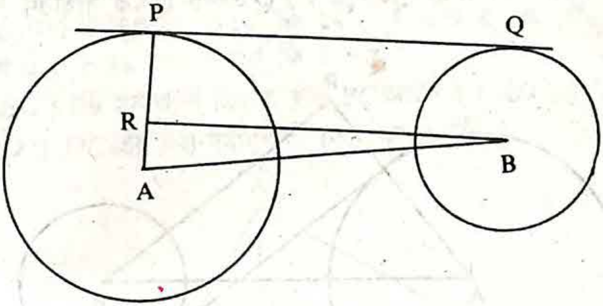
2. *ABC* একটি ত্রিভুজ। ওই ত্রিভুজের বাহুগুলির সঙ্গে ওই ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের সম্পর্ক কি ? ওই সম্পর্ক থেকে বলতো, কিভাবে ওই বৃত্তের কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ পাওয়া যাবে ? এবার যেকোনো একটি ত্রিভুজ *ABC* অঙ্কন করে তার অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন কর।

3. *O*-কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের *OP* একটি ব্যাসার্ধ। ওই ব্যাসার্ধের সঙ্গে *P* বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সম্পর্ক কি ? ওই সম্পর্ক ব্যবহার করে *O*-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের *P* বিন্দুতে স্পর্শক অঙ্কন কর।

4. *O*-কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত এবং *P* বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু। *P* বিন্দু থেকে যদি একটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায়, তাহলে স্পর্শবিন্দুতে *OP* যে কোণ উৎপন্ন করবে তার মান কত ? কোনো একটি রেখাংশকে ব্যাস করে যে অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করা যাবে, তার বৃত্তচাপের উপর অবস্থিত কোনো বিন্দুতে রেখাংশটি যে কোণ উৎপন্ন করবে, তার মান কত ? এই দুটি সম্পর্ক ব্যবহার করে *O*-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু *P* থেকে বৃত্তের স্পর্শক দুটি অঙ্কন কর।

5. A ও B-কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত। PQ একটি সরল সাধারণ স্পর্শক। $BR \parallel QP$.

এবার বলতো,



চিত্র নং: 248

i) ARB কি ধরণের ত্রিভুজ ?

ii) AR রেখাংশের দৈর্ঘ্য কত ?

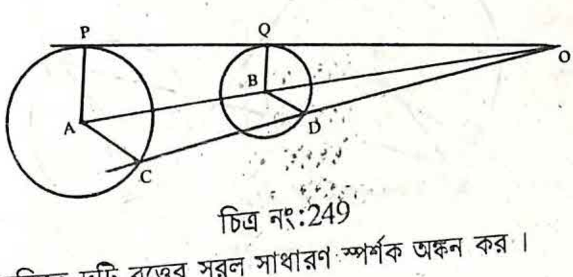
iii) কি করে R বিন্দুটি পাওয়া যাবে ?

iv) R বিন্দু পাওয়া গেলে কি করে P বিন্দু পাওয়া যাবে ?

v) P বিন্দু পাওয়া গেলে কি করে PQ সাধারণ স্পর্শকটি পাওয়া যাবে ?

এই তথ্যগুলি ব্যবহার করে A ও B-কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্তের একটি সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন কর।

6. A ও B-কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত। AC ও BD দুটি সমান্তরাল ব্যাসার্ধ। বর্ধিত CD ও AB পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে O বিন্দু থেকে B-কেন্দ্রীয় বৃত্তের স্পর্শক OQ অঙ্কন করা হল। যুক্তি দিয়ে দেখাও যে, QO-কে বর্ধিত করলে A কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তকেও স্পর্শ করবে।

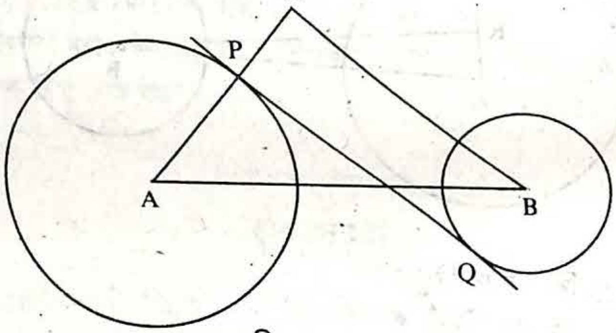


চিত্র নং: 249

এই পদ্ধতিতে দুটি বৃত্তের সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন কর।

7. যদি দুটি বৃত্ত সমান ব্যাসার্ধবিশিষ্ট হয়, তাহলে উপরের পদ্ধতি দুটি প্রযোজ্য হবে কি ? সেক্ষেত্রে $ABQP$ চতুর্ভুজটি কি ধরণের চতুর্ভুজ হবে ? সেই তথ্য থেকে সমান ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুটি বৃত্তের একটি সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন কর।

8. A ও B-কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত। PQ একটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক। $BR \parallel QP$.



চিত্র নং: 250

এবার বলতো

i) ARB কি ধরণের ত্রিভুজ ?

ii) AR রেখাংশের দৈর্ঘ্য কত ?

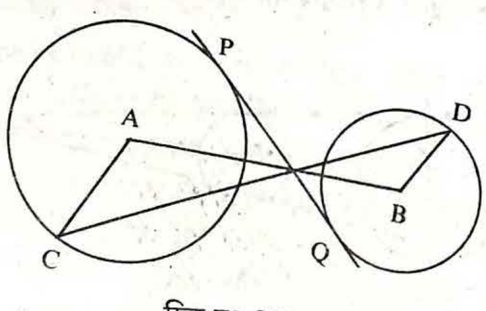
iii) কি করে R বিন্দুটি পাওয়া যাবে ?

iv) R বিন্দু পাওয়া গেলে কি করে P বিন্দু পাওয়া যাবে ?

v) P বিন্দু পাওয়া গেলে কি করে PQ সাধারণ স্পর্শকটি পাওয়া যাবে ?

এই তথ্যগুলি ব্যবহার করে A ও B-কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্তের একটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন কর।

9.



চিত্র নং: 251

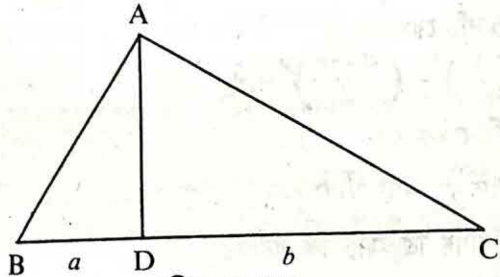
A ও B-কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত। AC ও BD দুটি সমান্তরাল ব্যাসার্ধ। CD ও AB পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। O বিন্দু থেকে B-কেন্দ্র-বিশিষ্ট বৃত্তের স্পর্শক OQ অঙ্কন করা হল। যুক্তি দিয়ে দেখাও যে, বর্ধিত QO, A-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করবে।

এই পদ্ধতিতে দুটি বৃত্তের তির্যক সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন কর।

10. মধ্য-সমানুপাতী বলতে কি বোঝ ? a ও b-এর মধ্য-সমানুপাতী c হলে a, b, c-এর মধ্যে সম্পর্ক কি হবে ?

ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার BC অতিভুজ। $AD \perp BC$.

BD ও DC-এর মধ্য-সমানুপাতী কোন রেখাংশটি ?

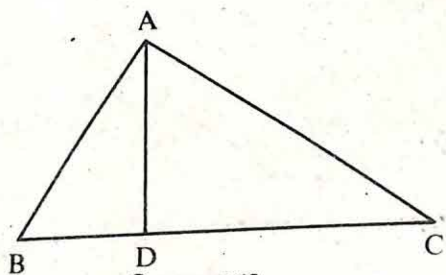


চিত্র নং:252

$BD = a, DC = b$ ধরলে এবং a ও b-এর মধ্য সমানুপাতী c হলে, c-কোন রেখাংশটি নির্দেশ করে ? BC-এর সঙ্গে a ও b-এর সম্পর্ক কি ? BC-কে অতিভুজ করে একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করার জন্য কি অঙ্কন করতে হবে ? ওই অঙ্কনের পর A বিন্দুটি কিভাবে পাওয়া যাবে ?

উপরের তথ্যগুলি ব্যবহার করে a ও b দুটি রেখাংশের মধ্য-সমানুপাতী অঙ্কন কর।

11. ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার BC অতিভুজ। $AD \perp BC$. $BC = a$ এবং $DC = b$ ধরলে এবং a ও b-এর মধ্য-সমানুপাতী c হলে, কোন রেখাংশটি c নির্দেশ করবে ? BD-এর সঙ্গে a ও b-এর সম্পর্ক কি ?



চিত্র নং:253

BC-কে অতিভুজ করে একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করার জন্য কি অঙ্কন করতে হবে ? ওই অঙ্কনের পর A বিন্দুটি কিভাবে পাওয়া যাবে ?

উপরের তথ্যগুলি ব্যবহার করে a ও b $(a > b)$ দুটি রেখাংশের মধ্য-সমানুপাতী অঙ্কন কর।

12. a ————————

b ————

a + b ——————————

a − b ———

a ও b দুটি রেখাংশ

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$$

সম্পর্কটি থেকে বল

$\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}$ এবং $\sqrt{ab}$

বাহু বিশিষ্ট ত্রিভুজটি কি ধরণের ত্রিভুজ হবে ?

a, b-এর সঙ্গে $\sqrt{ab}$-এর সম্পর্ক কি ?

উপরের তথ্যগুলি ব্যবহার করে a ও b-এর মধ্য-সমানুপাতী অঙ্কন কর।



চিত্র নং:254

13. মধ্য-সমানুপাতী অঙ্কন পদ্ধতি ব্যবহার করে জ্যামিতিক উপায়ে 24-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

বিবিধ প্রশ্নমালা 10

1. কোনো বৃত্তের AB ও CD দুটি জ্যা P বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে। $PB = PD$ হলে, প্রমাণ কর যে, $AB = CD$; আরও প্রমাণ কর যে, $ACBD$ একটি ট্রাপিজিয়ম।

2. কোনো বৃত্তের AB ও CD দুটি সমান্তরাল জ্যা। AD ও BC পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $PC = PD$.

3. ΔABC-এর অন্তঃকেন্দ্র O. বর্ধিত AO ওই ত্রিভুজের পরিবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $DB = DC = DO$.

4. কোনো বৃত্তের উপর A, B, C, D, E, F ছয়টি বিন্দু অবস্থিত। প্রমাণ কর যে, $\angle ABC + \angle CDE + \angle EFA = 4$ সমকোণ।

[আভাস : ΔACE অঙ্কন করে বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের ধর্ম ব্যবহার কর।]

5. কোনো বৃত্তস্থ সামান্তরিকের কর্ণ দুটির ছেদবিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র হবে– প্রমাণ কর।

6. $ABCD$ একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের BC বাহুকে E বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হল। প্রমাণ কর যে, $\angle BAD$ ও $\angle DCE$-এর সমদ্বিখণ্ডক দুটির ছেদবিন্দু বৃত্তের উপর অবস্থিত হবে।

7. ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তকে $\angle A, \angle B$ ও $\angle C$-এর সমদ্বিখণ্ডক তিনটি যথাক্রমে X, Y ও Z বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $YZ \perp AX$.

[আভাস : A, Y যুক্ত করে প্রমাণ কর যে, $\angle XAY$ ও $\angle AYZ$-এর সমষ্টি $\frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C)$-এর সমান।]

8. O-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বহিঃস্থ P বিন্দু থেকে PA স্পর্শক এবং PBC একটি ছেদক অঙ্কন করা হল। O বিন্দুর সঙ্গে যথাক্রমে A, P, B যুক্ত কর। BC-এর উপর OD লম্ব অঙ্কন করে প্রমাণ কর যে, $AP^2 = PD^2 - BD^2$. এ থেকে প্রমাণ কর যে, $AP^2 = PB.PC$.

9. O-কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের বহিঃস্থ P বিন্দু থেকে PCD একটি ছেদক। AB একটি ব্যাস। P বিন্দু থেকে AB-এর উপর অঙ্কিত লম্ব বর্ধিত AB-কে M বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ কর যে, $PM^2 = PC.PD - MB.MA$.

10. কোনো বৃত্তের উপর P, Q, R, S, T এমন পাঁচটি বিন্দু যে, $\angle QPR = \angle RPS = \angle SPT$. প্রমাণ কর যে, QS ও PR জ্যা দুটির অন্তর্ভুত কোণ = QT ও PS জ্যা দুটির অন্তর্ভুত কোণ।

11. O-কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের AB ও CD দুটি জ্যা পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করে। A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটি Q বিন্দুতে এবং C ও D বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটি R বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $\angle AQB + \angle CRD = 2\angle BPC$.

12. একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ $ABCD$-এর AB ও DC বাহুকে বর্ধিত করলে Q বিন্দুতে এবং BC ও AD বাহুকে বর্ধিত করলে R বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে। $\angle BQC$ ও $\angle CRD$-এর সমদ্বিখণ্ডক দুটি পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ কর যে, (i) $\angle BQC + \angle CRD = 180^\circ - 2\angle BAD$

$$(ii)\ \angle QOR = \angle BCD - \frac{1}{2}(\angle BQC + \angle CRD).$$

এ থেকে প্রমাণ কর যে, $\angle QOR = 1$ সমকোণ।

13. ΔABC কোনো বৃত্তে অন্তর্লিখিত। B বিন্দু থেকে AC-এর উপর অঙ্কিত লম্ব, AC-কে D বিন্দুতে এবং বৃত্তকে F বিন্দুতে ছেদ করে। C বিন্দু থেকে AB-এর উপরে অঙ্কিত লম্ব, AB-কে E বিন্দুতে এবং বৃত্তকে G বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $FG \parallel DF$.

14. ΔABC কোনো বৃত্তে অন্তর্লিখিত। $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক বৃত্তটিকে D বিন্দুতে ছেদ করে। D বিন্দুকে কেন্দ্র করে DC ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তটি AD কে P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, BP, $\angle ABC$-এর সমদ্বিখণ্ডক।

[আভাস ঃ CP-কে $\angle ACB$-এর সমদ্বিখণ্ডক প্রমাণ কর।]

15. A ও B-কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্তের একটি সরল সাধারণ স্পর্শক ও একটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, AB-কে ব্যাস করে অঙ্কিত বৃত্তের উপর P বিন্দু অবস্থিত হবে।

16. একটি সরলরেখার উপর অবস্থিত P ও Q বিন্দুতে PR ও QS দুটি লম্ব। PS ও QR পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। OT, PQ-এর উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{OT} = \frac{1}{PR} + \frac{1}{QS}$

17. $ABCD$ একটি রম্বস। C বিন্দুগামী একটি সরলরেখা AB ও বর্ধিত DA-কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, ΔAPQ, ΔPBC ও ΔDCQ সদৃশকোণী। এ থেকে প্রমাণ কর যে, $PB : DQ = AP^2 : AQ^2$.

18. $ABCD$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের BA ও CD বাহুকে বর্ধিত করায় তারা P বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। $\angle BPC$-এর সমদ্বিখণ্ডক AD ও BC-কে যথাক্রমে Q ও R বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AQ : QD = RC : BR$.

19. ΔABC-এর BC বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা AB ও AC-কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। BQ ও CP পরস্পরকে R বিন্দুতে ছেদ করে। বর্ধিত AR, BC-কে S বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে, S, BC-এর মধ্যবিন্দু।

[আভাস ঃ B বিন্দু দিয়ে PC-এর সমান্তরাল অঙ্কন কর এবং AS-কে বর্ধিত কর, যেন এই সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করে। ছেদবিন্দুর সঙ্গে C যুক্ত কর। এবার প্রমাণ করার দিকে এগিয়ে যাও।]

20. ΔABC-এর AB ও BC বাহুর উপর যথাক্রমে D ও E যেকোনো দুটি বিন্দু। D বিন্দুগামী BC-এর সমান্তরাল সরলরেখা AC-কে H বিন্দুতে ছেদ করে। AB-এর উপর F ও G এমন দুটি বিন্দু যে $\frac{BE}{DH} = \frac{BG}{DF}$.

প্রমাণ কর যে, $FH \parallel EG$.

21. ABC ত্রিভুজের BC বাহুর উপর D যেকোনো একটি বিন্দু। D বিন্দু দিয়ে AB ও AC-এর সমান্তরাল সরলরেখা যথাক্রমে AC ও AB-কে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে,

$$\frac{\Delta FBD}{\Delta AEF} = \frac{\Delta AEF}{\Delta EDC}$$

22. ΔABC কোনো বৃত্তে অন্তর্লিখিত। AD একটি ব্যাস ও AE, BC-এর উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে, ΔAEB ও ΔACD সদৃশকোণী। এ থেকে প্রমাণ কর যে, $AB.AC = AE.AD$. (ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য)।

23. ABC একটি ত্রিভুজ এবং AD, BE ও CF তিনটি সমবিন্দু সরলরেখা, যারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। D, E, F যথাক্রমে BC, CA ও AB-এর উপর অবস্থিত। প্রমাণ কর যে,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{\Delta ABD}{\Delta ADC} = \frac{\Delta OBD}{\Delta ODC} = \frac{\Delta AOB}{\Delta AOC}.$$

অনুরূপ দুটি সম্পর্ক CE, EA ও AF, FB-এর জন্য নির্ণয় করে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

(সেভার উপপাদ্য–1678 খৃষ্টাব্দ)।

24. একটি সরলরেখা ΔABC-এর BC বাহু, CA বাহু এবং বর্ধিত BA বাহুকে যথাক্রমে L, M ও N বিন্দুতে ছেদ করে। A, B ও C বিন্দু থেকে LMN সরলরেখার উপর যথাক্রমে AP, BQ ও CR লম্ব। প্রমাণ কর যে, ΔBLQ ও ΔCLR সদৃশ, ΔCRM ও ΔAPM সদৃশ এবং ΔAPN ও ΔBLN সদৃশ। এ থেকে প্রমাণ কর যে, $\frac{BL}{CL} \cdot \frac{CM}{AM} \cdot \frac{AN}{BN} = 1.$

(মেনিলাসের উপপাদ্য–প্রায় 100 খ্রীষ্টাব্দ)

25. ΔABC-এর পরিবৃত্তের উপর যেকোনো একটি বিন্দু P থেকে AB, BC ও বর্ধিত CA-এর উপর যথাক্রমে PL, PM ও PN লম্ব ; প্রমাণ কর যে, (*i*) $\angle PLM = 180^\circ - \angle PBC$; (*ii*) $\angle PLN = \angle PAN$; (*iii*) $\angle PLM + \angle PLN = 180^\circ$; (*iv*) MLN একটি সরলরেখা।

(MLN সরলরেখাটিকে সিমসন রেখা বলা হয়)।

26. ΔABC-এর O লম্ববিন্দু। প্রমাণ কর যে, O বিন্দু পাদ-ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র।

27. ΔABC-এর BC বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা AB ও AC-কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করলে $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ — এই উপপাদ্যটি একটি ছাত্র নিম্নলিখিত উপায়ে প্রমাণ করল ঃ

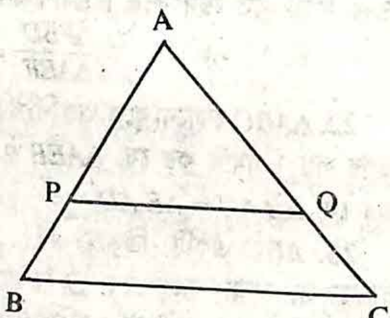
$\because$ $PQ \parallel BC$ এবং APB ভেদক,

$\therefore$ $\angle APQ =$ অনুরূপ $\angle ABC$,

অনুরূপভাবে,

$\angle AQP = \angle ACB$,

$\angle PAQ = \angle BAC$ (একই কোণ),



চিত্র নং ঃ 255

$\therefore$ ΔAPQ ও ΔABC সদৃশকোণী।

$\therefore$ অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী,

অর্থাৎ $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$.

$\therefore$ $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$.

প্রমাণটি সঠিক কিনা ? না হলে কোথায় ত্রুটি আছে তা বল ?

পরিশিষ্ট

অষ্টম শ্রেণীতে দুটি তালিকার একটির মাধ্যমে জানতে পেরেছ, কোনো জ্যামিতিক চিত্র বা চিত্রসমূহ কিভাবে অবস্থিত তা জানা থাকলে, তা থেকে আমরা কি কি জ্যামিতিক ধর্ম জানতে পারি । অপরটির মাধ্যমে জানতে পেরেছ, কোন কোন শর্তে আমরা একটি জ্যামিতিক ধর্ম পেতে পারি, অর্থাৎ কোন কোন তথ্য থেকে আমরা একটি জ্যামিতিক সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারি । নবম ও দশম শ্রেণীতেও তোমরা কতকগুলি জ্যামিতিক ধর্মের সঙ্গে পরিচিত হয়েছ ; তার ফলে ওই তালিকা দুটিতে স্বভাবতই আরও কিছু সংযোজন হবে । তোমাদের মনে রাখা প্রয়োজন, যে উপপাদ্যগুলি তোমরা শিখেছ বা অনুশীলনের মাধ্যমে আরও যে-সব জ্যামিতিক ধর্মের সঙ্গে তোমরা পরিচিত হয়েছ, তাছাড়াও আরও অনেক জ্যামিতিক ধর্ম আছে, যার ব্যবহার তোমাদের পরবর্তী জীবনে বিশেষ করে, উচ্চশিক্ষার ক্ষেত্রে প্রয়োজন হবে । সেই জ্যামিতিক ধর্মগুলি জানা বা প্রতিষ্ঠা করার ব্যাপারে এই তালিকা দুটি তোমাদের যথেষ্ট সাহায্য করবে ।

প্রথম তালিকা

যা দেওয়া আছে	তা থেকে যা পাওয়া যায়
1. একটি সরলরেখার উপর একটি রেখাংশ দণ্ডায়মান হওয়ার ফলে দুটি সন্নিহিত কোণ সমান হয়েছে।	(1) যেকোনো কোণ সমকোণ (সংজ্ঞা থেকে) । (2) রেখাংশটি সরলরেখাটির উপর লম্ব (সংজ্ঞা থেকে) ।
2. একটি সরলরেখার উপর একটি রেখাংশ দণ্ডায়মান আছে।	দুটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ ।
3. দুটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ ।	সন্নিহিত কোণ দুটির বাইরের দিকের বাহু দুটি একই সরলরেখায় অবস্থিত ।

যা দেওয়া আছে	তা থেকে যা পাওয়া যায়
4. দুটি সরলরেখা পরস্পরকে ছেদ করেছে।	বিপ্রতীপ কোণ পরস্পর সমান।
5. দুটি সরলরেখার কোনো একটি কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং অপরটি ওই কোণেরই বহির্দ্বিখণ্ডক।	(1) সরলরেখা দুটি পরস্পর লম্ব। (2) দুটি সমদ্বিখণ্ডকের অন্তর্ভূত কোণের মান এক সমকোণ।
6. দুটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব।	প্রতিটি কোণ সমকোণ (সংজ্ঞা থেকে)।
7. একটি কোণ সমকোণ।	বাহু দুটি পরস্পর লম্ব (সংজ্ঞা থেকে)।
8. দুটি সরলরেখা সমান্তরাল।	সরলরেখা দুটির কোনো ছেদবিন্দু নাই (সংজ্ঞা থেকে)।
9. দুটি সমান্তরাল সরলরেখাকে অপর একটি সরলরেখা ছেদ করেছে।	(1) অনুরূপ কোণগুলি পরস্পর সমান। (2) একান্তর কোণগুলি পরস্পর সমান। (3) ভেদকের একই পার্শ্বস্থ দুটি অন্তঃকোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।
10. তিনটি সমান্তরাল সরলরেখাকে অপর একটি সরলরেখা এমনভাবে ছেদ করেছে যে খণ্ডিত অংশ দুটি সমান হয়েছে।	অপর যেকোনো ভেদকের খণ্ডিত অংশ দুটিও সমান হবে।

যা দেওয়া আছে	তা থেকে যা পাওয়া যায়
11. দুটি সরলরেখাকে অপর একটি সরলরেখা ছেদ করার ফলে (*i*) দুই দুটি অনুরূপ কোণ সমান হয়েছে, অথবা, (*ii*) দুই দুটি একান্তর কোণ সমান হয়েছে, অথবা (*iii*) ভেদকের একই পার্শ্বস্থ দুটি অন্তঃস্থ কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হয়েছে।	সরলরেখা দুটি পরস্পর সমান্তরাল।
12. একটি সরলরেখা দুটি পরস্পর-ছেদী সরলরেখার যেকোনো একটির সমান্তরাল।	ওই সরলরেখাটি অপর সরলরেখাটির র সমান্তরাল হবে না।
13. একটি সরলরেখার বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে ওই সরল-রেখা পর্যন্ত অঙ্কিত রেখাংশ-গুলির মধ্যে একটি রেখাংশ সবচেয়ে ছোট।	ওই রেখাংশটি সরলরেখার উপর লম্ব।
14. একটি ত্রিভুজ।	(1) যেকোনো দুটি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বৃহত্তর। (2) তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।
15. ত্রিভুজের কোনো একটি বাহুকে বর্ধিত করা হয়েছে।	(1) বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দুটির সমান। (2) বহিঃস্থ কোণ যেকোনো একটি অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

যা দেওয়া আছে	তা থেকে যা পাওয়া যায়
16. ত্রিভুজের একটি বাহু অপর একটি বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।	বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।
17. ত্রিভুজের একটি কোণ অপর একটি কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।	বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।
18. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।	(1) দুটি বাহু সমান (সংজ্ঞা থেকে)। (2) সমান বাহু দুটির বিপরীত কোণ দুটি সমান। (3) শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমির লম্ব সমদ্বিখণ্ডক।
19. একটি ত্রিভুজের দুটি কোণ সমান।	সমান কোণ দুটির বিপরীত বাহু দুটি সমান।
20. একটি সমবাহু ত্রিভুজ।	(1) তিনটি বাহু সমান (সংজ্ঞা থেকে)। (2) তিনটি কোণ সমান। (3) প্রত্যেকটি কোণের মান 60°। (4) প্রতিটি কোণের সমদ্বিখণ্ডক বিপরীত বাহুর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক।
21. একটি সমকোণী ত্রিভুজ।	(1) একটি কোণ সমকোণ (সংজ্ঞা থেকে)। (2) অপর কোণ দুটির সমষ্টি এক সমকোণ। (3) অতিভুজ বৃহত্তম বাহু। (4) অপর বাহু দুটি পরস্পর লম্ব।

যা দেওয়া আছে	তা থেকে যা পাওয়া যায়
	(5) অতিভুজের উপর বর্গ অপর বাহু দুটির উপর বর্গের সমষ্টির সমান। (6) অতিভুজকে ব্যাস করে একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করলে তা সমকৌণিক বিন্দু দিয়ে যাবে।
22. একটি ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহুর উপর বর্গ অপর বাহু দুটির উপর বর্গের সমষ্টির সমান।	ত্রিভুজটি সমকোণী এবং বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কোণ সমকোণ।
23. একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ।	(1) একটি কোণ স্থূলকোণ (সংজ্ঞা থেকে)। (2) অপর কোণ দুটির প্রত্যেকটি সূক্ষ্ম কোণ। (3) স্থূলকোণের বিপরীত বাহু বৃহত্তম।
24. একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ।	প্রত্যেকটি কোণ সূক্ষ্মকোণ।
25. দুটি ত্রিভুজ সর্বসম।	(1) অনুরূপ বাহুগুলি পরস্পর সমান। (2) অনুরূপ কোণগুলি পরস্পর সমান। (3) ত্রিভুজ দুটির ক্ষেত্রফল সমান।
26. একটি ত্রিভুজের দুটি বাহুর মধ্য-বিন্দু যুক্ত করা হয়েছে।	(1) সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল। (2) সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর অর্ধেক।

যা দেওয়া আছে	তা থেকে যা পাওয়া যায়
27. একটি ত্রিভুজের একটি বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অপর একটি বাহুর সমান্তরাল অঙ্কন করা হয়েছে।	(1) সমান্তরাল সরলরেখাটি তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে। (2) ত্রিভুজের বাহুগুলি দ্বারা সমান্তরাল সরলরেখার খণ্ডিত অংশ দ্বিতীয় বাহুর অর্ধেক।
28. দুটি ত্রিভুজ একই ভূমি এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত।	ত্রিভুজ দুটির ক্ষেত্রফল সমান।
29. দুটি সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ একই ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত।	ত্রিভুজ দুটির শীর্ষবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা ও ভূমি পরস্পর সমান্তরাল।
30. একটি ত্রিভুজের দুটি বাহুর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক পরস্পরকে ছেদ করেছে।	(1) ছেদবিন্দু থেকে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির দূরত্ব সমান। (2) ছেদবিন্দু থেকে তৃতীয় বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে। (3) ছেদবিন্দু ও তৃতীয় বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর উপর লম্ব।
31. একটি ত্রিভুজের দুটি কোণের সমদ্বিখণ্ডক পরস্পরকে ছেদ করেছে।	(1) ছেদবিন্দু থেকে ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্বদৈর্ঘ্য সমান। (2) ছেদবিন্দু ও তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে।

যা দেওয়া আছে	তা থেকে যা পাওয়া যায়
32. একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি থেকে বিপরীত বাহুগুলির উপর লম্ব অঙ্কন করা হয়েছে।	(1) লম্বগুলি সমবিন্দু। (2) লম্বগুলির পাদবিন্দুগুলি যুক্ত করে যে ত্রিভুজ পাওয়া যাবে, তার (অর্থাৎ পাদ ত্রিভুজের) অন্তঃকোণগুলির সমদ্বিখণ্ডক হবে লম্বগুলি। (3) শীর্ষবিন্দুগুলি দিয়ে বিপরীত বাহুগুলির সমান্তরাল অঙ্কন করে যে ত্রিভুজটি পাওয়া যাবে, লম্বগুলি সেই ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্ব সমদ্বিখণ্ডক হবে।
33. একটি ত্রিভুজের একটি মধ্যমা টানা হয়েছে।	(1) মধ্যমাটি যে শীর্ষবিন্দু দিয়ে টানা হয়েছে, তার বিপরীত বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে। (2) মধ্যমাটি ত্রিভুজকে যে দুটি অংশে বিভক্ত করে তাদের ক্ষেত্রফল সমান।
34. একটি ত্রিভুজের দুটি মধ্যমা পরস্পরকে ছেদ করেছে।	(1) ছেদবিন্দু ও তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ বর্ধিত করলে তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে, অর্থাৎ ওটি-ই হবে তৃতীয় মধ্যমা। (2) যেকোনো মধ্যমা ছেদবিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত হবে। (3) ছেদবিন্দুর সঙ্গে শীর্ষবিন্দুগুলি যুক্ত করে যে তিনটি ত্রিভুজ পাওয়া যাবে তাদের ক্ষেত্রফল সমান হবে।
35. দুটি ত্রিভুজের একই শীর্ষবিন্দু এবং তাদের ভূমি একই সরলরেখার অবস্থিত।	(1) ত্রিভুজ দুটির ক্ষেত্রফলের অনুপাত দুটি ভূমির অনুপাতের সমান হবে। (2) ত্রিভুজ দুটির একই উচ্চতা।

যা দেওয়া আছে	তা থেকে যা পাওয়া যায়
36. দুটি ত্রিভুজের ভূমি একটি সরলরেখার উপর অবস্থিত এবং তাদের শীর্ষবিন্দু দুটি ঐ সরলরেখার সমান্তরাল একটি সরলরেখার উপর অবস্থিত।	(1) ত্রিভুজ দুটির উচ্চতা সমান। (2) ত্রিভুজ দুটির ক্ষেত্রফলের অনুপাত ভূমি দুটির অনুপাতের সমান হবে।
37. একটি ত্রিভুজের একটি বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অপর বাহু দুটিকে ছেদ করেছে।	অপর দুটি বাহুর খণ্ডিতাংশগুলির অনুপাত সমান।
38. একটি ত্রিভুজের দুটি বাহুকে একটি সরলরেখা সমানুপাতে বিভক্ত করেছে।	সরলরেখাটি তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল।
39. দুটি ত্রিভুজের একটির দুটি কোণ অপরটির দুটির কোণের সমান।	(1) ত্রিভুজ দুটির তৃতীয় কোণ দুটিও সমান হবে। (2) ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী।
40. দুটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী।	(1) ত্রিভুজ দুটির অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী। (2) ত্রিভুজ দুটি সদৃশ।
41. দুটি ত্রিভুজের বাহুগুলি সমানুপাতী।	(1) ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী। (2) ত্রিভুজ দুটি সদৃশ।
42. দুটি ত্রিভুজের দুটি বাহুর অনুপাত সমান ও তাদের অন্তর্ভূত কোণ দুটি সমান।	(1) ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী। (2) অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী। (3) ত্রিভুজ দুটি সদৃশ।

যা দেওয়া আছে	তা থেকে যা পাওয়া যায়
43. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু থেকে অতিভুজের উপর লম্ব অঙ্কন করা হয়েছে।	যে ত্রিভুজ দুটি গঠিত হল তারা মূল ত্রিভুজের সঙ্গে সদৃশ এবং তারা পরস্পর সদৃশ।
44. একটি চতুর্ভুজ।	চারটি কোণের সমষ্টি চারি সমকোণের সমান।
45. একটি ট্রাপিজিয়ম।	(1) দুটি বিপরীত বাহু পরস্পর সমান্তরাল (সংজ্ঞা থেকে)। (2) তির্যক বাহু সংলগ্ন কোণ দুটির সমষ্টি দুই সমকোণ।
46. একটি ট্রাপিজিয়মের দুটি তির্যক বাহুর মধ্যবিন্দু দুটি যুক্ত করা হয়েছে।	(1) সংযোজক রেখাংশ সমান্তরাল বাহুগুলির সমান্তরাল। (2) সংযোজক রেখাংশের দৈর্ঘ্য সমান্তরাল বাহু দুটির দৈর্ঘ্যের সমষ্টির অর্ধেক।
47. একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম।	(1) দুটি বিপরীত বাহু সমান্তরাল (সংজ্ঞা থেকে)। (2) তির্যক বাহু দুটি সমান (সংজ্ঞা থেকে)। (3) যেকোনো সমান্তরাল বাহু সংলগ্ন কোণ দুটি পরস্পর সমান। (4) যেকোনো তির্যক বাহু সংলগ্ন কোণ দুটির সমষ্টি দুই সমকোণ। (5) কর্ণ দুটি পরস্পর সমান এবং কর্ণ দুটির ছেদবিন্দু থেকে যেকোনো সমান্তরাল বাহুর প্রান্তবিন্দু দুটির দূরত্ব সমান। (6) শীর্ষবিন্দুগুলি সমবৃত্তস্থ।

যা দেওয়া আছে	তা থেকে যা পাওয়া যায়
48. একটি সামান্তরিক।	(1) দুই দুটি বিপরীত বাহু পরস্পর সমান্তরাল (সংজ্ঞা থেকে)। (2) দুই দুটি বিপরীত বাহু পরস্পর সমান। (3) দুই দুটি বিপরীত কোণ পরস্পর সমান। (4) কর্ণ দুটি পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। (5) যেকোনো কর্ণ সামান্তরিককে দুটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে। (6) যেকোনো একটি বাহু বিপরীত দুটি শীর্ষবিন্দুতে যে দুটি ত্রিভুজ উৎপন্ন করে, তাদের ক্ষেত্রফল সমান।
49. একটি চতুর্ভুজের *(i)* বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল, অথবা *(ii)* বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান, অথবা *(iii)* বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান, অথবা *(iv)* দুই দুটি বিপরীত বাহু পরস্পর সমান ও সমান্তরাল, অথবা *(v)* দুটি কর্ণ পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে, অথবা *(vi)* প্রতিটি কর্ণ চতুর্ভুজকে দুটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করেছে।	চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।
50. দুটি সামান্তরিক একই ভূমি এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত।	সামান্তরিক দুটির ক্ষেত্রফল সমান।

যা দেওয়া আছে	তা থেকে যা পাওয়া যায়
51. একটি সামান্তরিক ও একটি ত্রিভুজ একই ভূমি এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত।	ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।
52. একটি আয়তক্ষেত্র।	(1) এটি একটি সামান্তরিক ; সুতরাং সামান্তরিকের সকল ধর্মই বর্তমান। (2) প্রতিটি কোণের মান এক সমকোণ। (3) কর্ণ দুটি পরস্পর সমান। (4) শীর্ষবিন্দুগুলি সমবৃত্তস্থ ; যেকোনো কর্ণ ওই বৃত্তের ব্যাস এবং কর্ণ দুটির ছেদবিন্দুর ওই বৃত্তের কেন্দ্র।
53. একটি চতুর্ভুজের *(i)* যে-কোনো একটি ধর্ম যা থেকে চতুর্ভুজটি সামান্তরিক বলা যায় এবং যেকোনো একটি কোণ সমকোণ, অথবা *(ii)* পূর্বের যেকোনো একটি ধর্ম এবং কর্ণ দুটি সমান।	চতুর্ভুজটি আয়তক্ষেত্র।
54. একটি বর্গক্ষেত্র।	(1) এটি একটি আয়তক্ষেত্র ; সুতরাং আয়তক্ষেত্রের সকল ধর্মই বর্তমান। (2) চারটি বাহুই পরস্পর সমান। (3) কর্ণ দুটি সমান এবং একটি অপরটিকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

যা দেওয়া আছে	তা থেকে যা পাওয়া যায়
	(4) যেকোনো কর্ণ সংশ্লিষ্ট শীর্ষবিন্দু দুটিতে যে দুটি কোণ উৎপন্ন হয়েছে, কর্ণটি তাদের সমদ্বিখণ্ডিত করে, অর্থাৎ যেকোনো কর্ণ বর্গক্ষেত্রকে দুটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে বিভক্ত করে।
55. একটি চতুর্ভুজের (*i*) যেকোনো একটি ধর্ম যা থেকে চতুর্ভুজটিকে আয়তক্ষেত্র বলা যায় এবং কর্ণ দুটি লম্বভাবে পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, অথবা, (*ii*) পূর্বের যেকোনো একটি ধর্ম ও দুটি সন্নিহিত বাহু সমান।	চতুর্ভুজটি একটি বর্গক্ষেত্র।
56. একটি রম্বস।	(1) চারটি বাহু পরস্পর সমান। (2) একটি কোণও সমকোণ নয়। (3) কর্ণ দুটি অসমান এবং একে অপরকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে। (4) যেকোনো কর্ণসংশ্লিষ্ট শীর্ষবিন্দু দুটিতে যে দুটি কোণ উৎপন্ন হয়েছে, কর্ণটি তাদের সমদ্বিখণ্ডিত করে। (5) এটি একটি সামান্তরিক, সুতরাং সামান্তরিকের সকল ধর্মই বর্তমান। (6) শীর্ষবিন্দুগুলি কখনই সমবৃত্তস্থ হবে না।

যা দেওয়া আছে	তা থেকে যা পাওয়া যায়
57. একটি চতুর্ভুজের (*i*) চারটি বাহুই সমান কিন্তু একটি কোণও সমকোণ নয়, অথবা, (*ii*) দুটি কর্ণ অসমান এবং তারা পরস্পরকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে, অথবা, (*iii*) এমন একটি ধর্ম বর্তমান, যা থেকে চতুর্ভুজটিকে সামান্তরিক এবং দুটি সন্নিহিত বাহু সমান বলা যায়, কিন্তু কোনো কোণই সমকোণ নয়।	চতুর্ভুর্জটি একটি রম্বস।
58. একটি বৃত্ত।	(1) সকল ব্যাস সমান। (2) সকল ব্যাসার্ধ সমান। (3) ব্যাসার্ধ ব্যাসের অর্ধেক। (4) ব্যাসের মধ্যবিন্দুই বৃত্তের কেন্দ্র।
59. একটি বৃত্তের দুটি সমান জ্যা।	(1) জ্যা দুটি কেন্দ্রে সমান কোণ উৎপন্ন করে। (2) জ্যা দুটি দ্বারা খণ্ডিত অনুরূপ বৃত্তচাপ দুটি সমান। (3) জ্যা দুটি কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী।
60. একটি বৃত্তের দুটি সমান বৃত্তচাপ।	(1) বৃত্তচাপ দুটি কেন্দ্রে সমান কোণ উৎপন্ন করে। (2) বৃত্তচাপ দুটির প্রত্যেকটির প্রান্তবিন্দু দুটির সংযোজক জ্যা দুটি সমান। (3) বৃত্তচাপ দুটির উপর অবস্থিত পরিধিস্থ কোণ দুটি পরস্পর সমান।

যা দেওয়া আছে	তা থেকে যা পাওয়া যায়
61. বৃত্তের একটি জ্যা এবং কেন্দ্র থেকে তার উপর লম্ব।	লম্ব জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
62. বৃত্তের একটি জ্যা এবং কেন্দ্র ও জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা।	সংযোজক সরলরেখাটি জ্যা-এর উপর লম্ব।
63. বৃত্তের দুটি অসমান্তরাল জ্যা-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক।	লম্ব সমদ্বিখণ্ডক দুটির ছেদবিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র।
64. বৃত্তের দুটি সমান্তরাল জ্যা-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক।	বৃত্তের কেন্দ্রগামী একটি সরলরেখা।
65. একটি বৃত্তে একই বৃত্তচাপের উপর কেন্দ্রস্থ কোণ ও পরিধিস্থ কোণ।	কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ।
66. একই বৃত্তাংশস্থ দুটি কোণ, অথবা, একই বৃত্তচাপের উপর দুটি পরিধিস্থ কোণ।	কোণ দুটি পরস্পর সমান।
67. অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।	কোণটির মান এক সমকোণ।
68. অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ।	কোণটি সূক্ষ্মকোণ।
69. অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশস্থ কোণ।	কোণটি স্থূলকোণ।
70. একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।	বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সম্পূরক।

যা দেওয়া আছে	তা থেকে যা পাওয়া যায়
71. একটি রেখাংশ তার একই পার্শ্বে অবস্থিত দুটি বিন্দুতে সমান কোণ উৎপন্ন করে।	রেখাংশের প্রান্তবিন্দু দুটি এবং দুটি কোণের শীর্ষবিন্দু দুটি সমবৃত্তস্থ হবে।
72. একটি চতুর্ভুজের দুটি বিপরীত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।	চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ হবে, অর্থাৎ চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি সমবৃত্তস্থ হবে।
73. বৃত্তের একটি বিন্দুতে স্পর্শক।	স্পর্শবিন্দু ছাড়া স্পর্শকের উপরে অবস্থিত অপর বিন্দুগুলি বৃত্তের বহিঃস্থ।
74. বৃত্তের একটি স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।	স্পর্শক ও স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত।
75. বৃত্তের স্পর্শকের উপর স্পর্শবিন্দুতে লম্ব।	লম্বটি বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যাবে।
76. বৃত্তের কোনো ব্যাসার্ধ যে বিন্দুতে বৃত্তকে ছেদ করেছে, সেই বিন্দুতে ব্যাসার্ধের উপর লম্ব।	লম্বটি ঐ বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক।
77. বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তের দুটি স্পর্শক।	(1) স্পর্শক দুটি দৈর্ঘ্যে সমান। (2) স্পর্শক দুটি কেন্দ্রে সমান কোণ উৎপন্ন করে। (3) বহিঃস্থ বিন্দু ও কেন্দ্রের সংযোজক সরলরেখা স্পর্শক দুটির অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডক। (4) ঐ সংযোজক সরলরেখা দুটি স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা-কে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

যা দেওয়া আছে	তা থেকে যা পাওয়া যায়
78. দুটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করেছে।	(1) বৃত্ত দুটির কেন্দ্র ও স্পর্শবিন্দু সমরেখ। (2) কেন্দ্র দুটির মধ্যে দূরত্ব বৃত্ত দুটির ব্যাসার্ধের সমষ্টির সমান।
79. দুটি বৃত্ত পরস্পরকে অন্তঃস্পর্শ করেছে।	(1) বৃত্ত দুটির কেন্দ্র ও স্পর্শবিন্দু সমরেখ। (2) কেন্দ্র দুটির মধ্যে দূরত্ব বৃত্ত দুটির ব্যাসার্ধের অন্তরফলের সমান।

দ্বিতীয় তালিকা

কি প্রমাণ করতে হবে	কি কি দেওয়া থাকলে প্রমাণ করা যাবে
1 একটি কোণ সমকোণ।	(1) একটি সরলরেখার উপর একটি রেখাংশ দণ্ডায়মান হলে, সন্নিহিত কোণ দুটি সমান। (2) একটি সরলরেখার উপর অপর একটি সরলরেখা লম্ব। (3) একটি ত্রিভুজের একটি কোণ, অপর দুটি কোণের সমষ্টির সমান। (4) কোণটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের বিপরীত কোণ। (5) কোণটি আয়তক্ষেত্র বা বর্গক্ষেত্রের একটি কোণ। (6) কোণটি বর্গক্ষেত্র বা রম্বসের দুটি কর্ণের অন্তর্ভূত কোণ। (7) কোণটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। (8) কোণটি একটি স্পর্শক ও স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের অন্তর্ভুত কোণ। (9) কোণটি বৃত্তের কোন জ্যা এবং জ্যা-এর মধ্যবিন্দু ও কেন্দ্রের সংযোজক রেখাংশের অন্তর্ভূত কোণ। (10) একটি কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডকের অন্তর্ভূত কোণ। (11) একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক বা শীর্ষবিন্দু থেকে অঙ্কিত মধ্যমা ভূমির সঙ্গে যে কোণ উৎপন্ন করে সেই কোণ। (12) কোণটি এমন একটি ত্রিভুজের একটি কোণ যে ওই কোণের শীর্ষবিন্দু থেকে অঙ্কিত মধ্যমা বিপরীত বাহুর অর্ধেক হবে।

কি প্রমাণ করতে হবে	কি কি দেওয়া থাকলে প্রমাণ করা যাবে
2. দুটি রেখাংশ একই সরলরেখায় অবস্থিত বা তিনটি বিন্দু সমরেখ।	(1) ওই দুটি রেখাংশ দ্বারা উৎপন্ন কোণের মান 180° (2) রেখাংশ দুটির সাধারণ বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত যেকোনো সরলরেখার সঙ্গে রেখাংশ দুটি বিপরীত দিকে সমান কোণ উৎপন্ন করে। (3) রেখাংশ দুটির সাধারণ বিন্দুগামী কোনো সরলরেখার উপর ওই রেখাংশ দুটি লম্ব। (4) রেখাংশ দুটির একটি সাধারণ বিন্দু থাকে এবং রেখাংশ দুটি একই সরলরেখার সমান্তরাল। (5) তিনটি বিন্দুর যেকোনো একটির সঙ্গে বিশেষ করে অন্তর্বর্তী বিন্দুটির সঙ্গে অন্য বিন্দু দুটি যুক্ত করে যদি উপরে উল্লিখিত ধর্মগুলির যেকোনোটি পাওয়া যায়। (6) বিন্দু তিনটি যদি কোনো সামান্তরিকের দুটি বিপরীত শীর্ষবিন্দু এবং যে কর্ণটি ওই দুটি শীর্ষবিন্দু দিয়ে যায়নি তার মধ্যবিন্দু হয়। (7) বিন্দু তিনটি যদি একটি বৃত্তের কেন্দ্র এবং দুটি সমান্তরাল জ্যা-এর মধ্যবিন্দু হয়। (8) বিন্দু তিনটি যদি একটি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র, একটি শীর্ষবিন্দু ও বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু হয়। (9) বিন্দু তিনটি যদি দুটি সমান্তরাল স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু ও বৃত্তের কেন্দ্র হয়। (10) বিন্দু তিনটি যদি একটি স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু, স্পর্শকের সমান্তরাল কোনো জ্যা-এর মধ্যবিন্দু এবং বৃত্তের কেন্দ্র হয়। (11) বিন্দু তিনটি যদি পরস্পরকে স্পর্শ করেছে এমন দুটি বৃত্তের স্পর্শবিন্দু এবং ঐ দুটি বৃত্তের কেন্দ্র হয়।

কি প্রমাণ করতে হবে	কি কি দেওয়া থাকলে প্রমাণ করা যাবে
3. দুটি কোণ সমান।	(1) কোণ দুটির প্রত্যেকে সমকোণ। (2) যদি একটি সরলরেখার উপর অপর একটি সরলরেখা লম্বভাবে অবস্থিত হয়। (3) কোণ দুটি বিপ্রতীপ কোণ। (4) দুটি সমান্তরাল সরলরেখাকে অপর একটি সরলরেখা ছেদ করলে যে দুটি অনুরূপ বা একান্তর কোণ পাওয়া যায়। (5) কোণ দুটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণ হয়। (6) দুটি সমান্তরাল সরলরেখা অপর দুটি সমান্তরাল সরলরেখার সঙ্গে একই দিকে যে দুটি কোণ উৎপন্ন করে। (7) কোণ দুটি সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ। (8) দুটি ত্রিভুজের একটির দুটি কোণের সমষ্টি অপরটির দুটি কোণের সমষ্টি সমান হলে, কোণ দুটি ঐ ত্রিভুজ দুটির তৃতীয় কোণ। (9) কোণ দুটি সামান্তরিকের বিপরীত কোণ। (10) কোণ দুটি একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়মের সমান্তরাল বাহু দুটির যেকোনোটির সংলগ্ন কোণ। (11) কোণ দুটি একই বা দুটি সমান কোণের সমান, অর্ধেক বা দ্বিগুণ। (12) কোণ দুটি একই বৃত্তাংশস্থ কোণ বা একই চাপের উপর পরিধিস্থ কোণ। (13) কোণ দুটি সমান দুটি জ্যা দ্বারা কেন্দ্রে বা অনুরূপ বৃত্তচাপের উপর অবস্থিত একই বিন্দুতে বা দুটি বিন্দুতে উৎপন্ন দুটি কোণ। (14) কোণ দুটির একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের একটি কোণ এবং অপরটি অনুরূপ বহিঃস্থ কোণ। (15) বহিঃস্থ বিন্দু থেকে অঙ্কিত দুটি স্পর্শক কেন্দ্রে যে দুটি কোণ উৎপন্ন করে। (16) দুটি ত্রিভুজের বাহুগুলি সমানুপাতী হলে, তার দুটি অনুরূপ কোণ।

কি প্রমাণ করতে হবে	কি কি দেওয়া থাকলে প্রমাণ করা যাবে
4. দুটি রেখাংশ সমান।	(1) একটি ত্রিভুজের দুটি সমান কোণের বিপরীত বাহু। (2) একটি ত্রিভুজ সমদ্বিবাহু বা সমবাহু। (3) একটি ট্রাপিজিয়মের সমান্তরাল বাহু দুটির যেকোনো একটির সংলগ্ন কোণ। সমান। (4) একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়মের তির্যক বাহু। (5) রেখাংশ দুটি সর্বসম দুটি ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু। (6) রেখাংশ দুটি সামান্তরিকের বিপরীত বাহু। (7) রেখাংশ দুটি আয়তক্ষেত্রের কর্ণ। (8) রেখাংশ দুটি একটি রম্বস বা বর্গক্ষেত্রের যেকোনো দুটি বাহু। (9) রেখাংশ দুটি একই বা সমান দুটি রেখাংশের সমান, অর্ধেক বা দ্বিগুণ। (10) রেখাংশ দুটি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণের সমদ্বিখণ্ডক বা ঐ দুটি শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব বা মধ্যমা। (11) রেখাংশ দুটি কোনো বৃত্তের ব্যাস বা ব্যাসার্ধ। (12) রেখাংশ দুটি কোনো বৃত্তের একটি জ্যা-এর দুটি অংশ যা কেন্দ্র থেকে ঐ জ্যা-এর উপর লম্ব অঙ্কন করার ফলে পাওয়া গেছে। (13) রেখাংশ দুটির একটি কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের অর্ধেক এবং অপরটি অতিভুজের উপর মধ্যমা। (14) রেখাংশ দুটি যেকোনো একটি রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত কোন বিন্দু থেকে ঐ রেখাংশের প্রান্তবিন্দু দুটির দূরত্ব। (15) রেখাংশ দুটি, দুটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখার অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত কোনো বিন্দু থেকে ঐ সরলরেখা দুটির দূরত্ব।

কি প্রমাণ করতে হবে	কি কি দেওয়া থাকলে প্রমাণ করা যাবে
	(16) রেখাংশ দুটি বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু থেকে অঙ্কিত বৃত্তের দুটি স্পর্শক। (17) রেখাংশ দুটি কোনো বৃত্তের কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী দুটি জ্যা।
5 দুটি ত্রিভুজ সর্বসম।	(1) দুটি বাহু ও তাদের অন্তর্ভূত কোণ সমান। (2) দুটি কোণ ও একটি অনুরূপ বাহু সমান। (3) তিনটি বাহু সমান। (4) ত্রিভুজ দুটি সমকোণী ত্রিভুজ হলে, অতিভুজ ও অপর যেকোনো একটি বাহু সমান।
6. দুটি সরলরেখা বা রেখাংশ সমান্তরাল।	(1) সরলরেখা দুটিকে অপর একটি সরলরেখা ছেদ করলে দুটি অনুরূপ কোণ বা দুটি একান্তর কোণ সমান, অথবা, ভেদকের একই পার্শ্বস্থ দুটি অন্তঃকোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান। (2) সরলরেখা দুটি অন্য কোনো সরলরেখার উপর লম্ব। (3) সরলরেখা দুটির প্রত্যেকেই অপর একটি সরলরেখার সমান্তরাল। (4) রেখাংশ দুটি সামান্তরিকের বিপরীত বাহু। (5) রেখাংশ দুটির একটি কোনো ত্রিভুজের একটি বাহু এবং অপরটি ত্রিভুজের অপর বাহু দুটির মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ। (6) রেখাংশ দুটির একটি সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজের সাধারণ বাহু এবং ত্রিভুজ দুটি ঐ রেখাংশের একই পার্শ্বে অবস্থিত হলে, ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু দুটি অপর রেখাংশের উপর অবস্থিত। (7) রেখাংশ দুটি ট্রাপিজিয়মের বিপরীত বাহু (যেকোনো দুটি বিপরীত বাহু নয়)। (8) সরলরেখা দুটি কোনো বৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দুতে দুটি স্পর্শক।

কি প্রমাণ করতে হবে	কি কি দেওয়া থাকলে প্রমাণ করা যাবে
	(9) রেখাংশ দুটির একটি ত্রিভুজের একটি বাহু এবং অপরটি ত্রিভুজের অপর বাহু দুটি যে দুটি বিন্দুতে সমানুপাতে বিভক্ত হয়, সেই দুটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ। (10) দুটি সমান্তরাল সরলরেখার উপর অবস্থিত কোনো দুটি বিন্দুতে একই দিকে যে দুটি কোণ উৎপন্ন হয়, তাদের অপর দুটি বাহু।
7. একটি সরলরেখা অপর একটি সরলরেখার উপর লম্ব।	যে কটি শর্তে একটি কোণকে সমকোণ প্রমাণ করা যায়, সেই সব কটি শর্তই প্রযোজ্য (কারণ, সমকোণের বাহু দুটি পরস্পর লম্ব)। তাছাড়া অপর একটি শর্ত ঃ একটি সরলরেখার উপর অবস্থিত কোনো বিন্দু থেকে অপর একটি সরলরেখা পর্যন্ত যত রেখাংশ অঙ্কন করা যায়, তাদের মধ্যে প্রথম সরলরেখার অংশটির দৈর্ঘ্যই যদি ন্যূনতম হয়।
8. একটি চতুর্ভুজ সামান্তরিক।	(1) বিপরীত বাহুগুলি সমান্তরাল। (2) বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান। (3) বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান। (4) যেকোনো দুটি বিপরীত বাহু পরস্পর সমান ও সমান্তরাল। (5) যেকোন দুটি বিপরীত বাহু পরস্পর সমান্তরাল ও যেকোনো দুটি বিপরীত কোণ পরস্পর সমান। (6) দুটি কর্ণ পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। (7) দুটি কর্ণই চতুর্ভুজটিকে দুটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে।
9. একটি চতুর্ভুজ আয়তক্ষেত্র।	(1) চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক এবং যেকোনো একটি কোণ সমকোণ। (2) চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক এবং কর্ণ দুটি সমান। (3) চতুর্ভুজটি একটি বৃত্তস্থ সামান্তরিক।

কি প্রমাণ করতে হবে	কি কি দেওয়া থাকলে প্রমাণ করা যাবে
10. একটি চতুর্ভুজ বর্গক্ষেত্র।	(1) চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র এবং যেকোনো দুটি সন্নিহিত বাহু পরস্পর সমান। (2) চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র এবং কর্ণ দুটি লম্বভাবে অবস্থিত। (3) চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র এবং একটি কর্ণ বিপরীত কোণ দুটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। (4) চতুর্ভুজটি একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ, যার কর্ণ দুটি পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত ব্যাস।
11. একটি চতুর্ভুজ রম্বস।	(1) চতুর্ভুজটির চারটি বাহুই সমান, কিন্তু একটি কোণও সমকোণ নয়। (2) চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক (আয়তক্ষেত্র নয়) এবং যেকোনো দুটি সন্নিহিত বাহু পরস্পর সমান। (3) চতুর্ভুজটির কর্ণ দুটি অসমান এবং তারা পরস্পরকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
12. একটি চতুর্ভুজ সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম।	(1) চতুর্ভুজটির দুটি বিপরীত বাহু সমান্তরাল এবং অপর দুটি বাহু (তির্যক বাহু) সমান। (2) চতুর্ভুজটির দুটি বিপরীত বাহু সমান্তরাল এবং যেকোনো একটি সমান্তরাল বাহু সংলগ্ন কোণ দুটি পরস্পর সমান। (3) চতুর্ভুজটি একটি বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ম।
13. দুটি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল সমান।	সামান্তরিক দুটি একই ভূমিবিশিষ্ট বা সমান ভূমি বিশিষ্ট এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত বা একই উচ্চতাবিশিষ্ট।
14. দুটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সমান।	(1) ত্রিভুজ দুটি সর্বসম। (2) ত্রিভুজ দুটি একই ভূমি বিশিষ্ট বা সমান ভূমি বিশিষ্ট এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত বা একই উচ্চতা বিশিষ্ট।

কি প্রমাণ করতে হবে	কি কি দেওয়া থাকলে প্রমাণ করা যাবে
	(3) ত্রিভুজ দুটির ভূমি ও একটি সামান্তরিকের ভূমি একই এবং তারা একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত।
15. দুটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অনুপাত তাদের ভূমির অনুপাতের সমান।	ত্রিভুজ দুটির ভূমি একই সরলরেখায় অবস্থিত এবং তাদের একই শীর্ষবিন্দু বা তাদের শীর্ষবিন্দু ভূমির সমান্তরাল কোনো সরলরেখায় অবস্থিত।
16. একটি ত্রিভুজ সমদ্বিবাহু।	(1) ত্রিভুজের দুটি বাহু সমান। (2) ত্রিভুজের দুটি কোণ সমান। (3) ত্রিভুজের একটি কোণের সমদ্বিখণ্ডক বিপরীত বাহুকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
17. একটি ত্রিভুজ সমবাহু।	(1) ত্রিভুজের দুটি কোণের প্রত্যেকটির মান 60° (2) প্রত্যেকটি বাহু সমান। (3) ত্রিভুজের দুটি কোণের সমদ্বিখণ্ডক তাদের বিপরীত বাহুকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
18. একটি ত্রিভুজ সমকোণী।	(1) ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ। (2) ত্রিভুজের দুটি কোণের সমষ্টি এক সমকোণ। (3) ত্রিভুজটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত, যার একটি বাহু ব্যাস। (4) ত্রিভুজটির বৃহত্তম বাহুর উপর বর্গ অপর দুই বাহুর উপর বর্গের সমষ্টির সমান।
19. দুটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী।	(1) দুটি ত্রিভুজের একটির যেকোনো দুটি কোণ অপরটির দুটি কোণের সমান। (2) ত্রিভুজ দুটির বাহুগুলি সমানুপাতী।

কি প্রমাণ করতে হবে	কি কি দেওয়া থাকলে প্রমাণ করা যাবে
20 দুটি ত্রিভুজ সদৃশ।	(1) ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী। (2) ত্রিভুজ দুটির বাহুগুলি সমানুপাতী। (3) ত্রিভুজ দুটির একটির দুটি বাহু ও অপরটির অনুরূপ দুটি বাহুর অনুপাত সমান এবং তাদের অন্তর্ভূত কোণও সমান। (4) ত্রিভুজ দুটি যদি একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু থেকে অতিভুজের উপর লম্ব অঙ্কন করার ফলে পাওয়া যায়, অথবা ত্রিভুজ দুটির একটি ওই ত্রিভুজ দুটির একটি এবং অপরটি মূল সমকোণী ত্রিভুজটি হয়।
21 চারটি বিন্দু সমবৃত্তস্থ।	(1) ওই চারটি বিন্দুর যেকোনো দুটি বিন্দু অপর বিন্দুর দুটির সংযোজক রেখাংশের একই পার্শ্বে অবস্থিত হয় এবং রেখাংশটি ঐ দুটি বিন্দুতে সমান কোণ উৎপন্ন করে। (2) বিন্দু চারটি যদি এমন একটি চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দু হয়, যার দুটি বিপরীত কোণ পরস্পর সম্পূরক।
22 একটি সরল-রেখা কোন বৃত্তের কেন্দ্র-গামী।	(1) ওই সরলরেখাটির এমন একটি রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক, যে রেখাংশটি বৃত্তের জ্যা। (2) ঐ সরলরেখাটি এমন দুটি পরস্পরছেদী সরল-রেখার অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডক, যে সরলরেখা দুটি বৃত্তের স্পর্শক।
23 একটি সরল-রেখা বৃত্তের স্পর্শক।	বৃত্তের কোনো ব্যাসার্ধ যে বিন্দুতে বৃত্তকে ছেদ করে সরলরেখাটি ঐ বিন্দুতে ব্যাসার্ধের উপর লম্ব।

[মন্তব্য ঃ এই তালিকা দুটি সম্পূর্ণ নাও হতে পারে। সুতরাং যদি এমন কোনো সংযোজন প্রয়োজন হয় যা যুক্তিযুক্ত, তা নিশ্চয়ই করা যাবে।]

উত্তরমালা

জ্যামিতি

অনুশীলনী 1

1. 55°, সদৃশকোণী 2. (*i*) 16 সমকোণ, 4 সমকোণ, 20 সমকোণ, 4 সমকোণ (*ii*) 9 (*iii*) 12 (*iv*) 140°, 40° 3. 64° 4 55°, 117·5°, 55°, 117·5°, 70° 5. (*i*) সমরেখ নয় (*ii*) সমরেখ (*iii*) সমরেখ (*iv*) সমরেখ নয় (*v*) সমরেখ (*vi*) সমরেখ (*vii*) সমরেখ (*viii*) সমরেখ 6. 90° 7 90° 8. $AB = AD$ 9. 135°, 45°, 135° 10. 60°, OA, OD ; OB, OE ; OC, OF ; সুষম ষড়ভুজ 11. (*i*) BC, AB, AC (*ii*) $\angle A$, $\angle C$, $\angle B$ 12. $\angle AOD = 108°$, $\angle DOB = 72°$, $\angle BOC = 108°$, $\angle COA = 72°$ 13. (*i*) $\angle BAC + \angle ACD = 2$ সমকোণ (*ii*) $\angle ABC = \angle BCD$ (*iii*) (ক) $\angle CDB + \angle ABD = 2$ সমকোণ, (খ) $\angle CDB = \angle ABE$ 14. (*i*) ও (*iii*)-এর ক্ষেত্রে সম্ভব ; (*i*)-এর ক্ষেত্রে বাহুগুলির ক্রম—2 সেমি ও 6 সেমি বাহু দুটির কর্ণের এক পার্শ্বে এবং 5 সেমি ও 4 সেমি বাহু দুটি কর্ণের অপর পার্শ্বে (*iii*)-এর ক্ষেত্রে যেকোনো ক্রমে নিলেই চলবে। 15. 12 সেমি 16. OR সবচেয়ে ছোট, $OQ = OS$, না 17. (*i*) দুটি সন্নিহিত কোণ সমান হলে, যদি সন্নিহিত কোণ দুটির বহিঃস্থ বাহু দুটি এক সরলরেখায় অবস্থিত হয়, তাহলেই প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ হবে। (*ii*) দুটি ত্রিভুজের একটির দুটি বাহু ও তাদের অন্তর্ভূত কোণ, অপরটির দুটি বাহু ও তাদের অন্তর্ভূত কোণ সমান হলে, ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে। (iii) দুটি ত্রিভুজের একটির দুটি কোণ ও একটি বাহু যদি অপর ত্রিভুজের দুটি কোণ ও প্রথম ত্রিভুজের বাহুটির অনুরূপ বাহু সমান হয়, তাহলে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে (*iv*) দুটি ত্রিভুজ সর্বসম হলে, অনুরূপ বাহুগুলী ও অনুরূপ কোণগুলি সমান হবে। (*v*) (a) যেহেতু ∠BGE ও ∠DHG অনুরূপ কোণ দুটি সমান, সুতরাং AB ও CD সমান্তরাল, (b) যেহেতু ∠BGH ও ∠GHC একান্তর কোণ দুটি সমান, সুতরাং AB ও CD সমান্তরাল। 18. (*i*) $\angle A = \angle Q$, $\angle C = \angle P$ (*ii*) $PR = XY$, $PQ = YZ$ (*iii*) $\angle A = \angle Z$, $\angle B = \angle Y$, $\angle C = \angle X$

অনুশীলনী 2

1. সামান্তরিক 2. $ABEC$, $ABFD$ 3. $AC \parallel BD$, $AD \parallel CB$ 4. সামান্তরিক 5. $AB \parallel FE$, আয়তক্ষেত্র 6. $AD \parallel BC$ 7. লম্বগুলি সমবিন্দু 8. প্রত্যেকেই সামান্তরিক , (*i*) $AP = AQ$ (*ii*) $BP = BR$ (*iii*) $CR = CQ$

(iv) $AB = \frac{1}{2}QR$ (v) $BC = \frac{1}{2}PQ$ (vi) $CA = \frac{1}{2}RP$ 9 লম্ব সমদ্বিখণ্ডকগুলি সমবিন্দু 10. অন্তর্দ্বিখণ্ডকগুলি সমবিন্দু 11. মধ্যমাগুলি সমবিন্দু 12. সামান্তরিক।

অনুশীলনী 3

4. 360° ; 180° ; $AB \parallel CD$ 8. $BCEF$ একটি সামান্তরিক হতো

অনুশীলনী 12

1. (i) 12 বর্গ সেমি (ii) 6 বর্গ সেমি (iii) 12 বর্গ সেমি

অনুশীলনী 13

1. 61 সেমি 2. 15 সেমি 3. 37 সেমি, 12 সেমি 4. 65 মি 5. 48মি, 73 মি, 55 মি

অনুশীলনী 14

8. $CDEF$ একটি সামান্তরিক, উভয়ের ক্ষেত্রফল সমান।

বিবিধ প্রশ্নমালা 1

1. $CD = 5$ সেমি, $AD = 3$ সেমি, $\angle BAD = 75°$, $\angle BCD = 75°$, $\angle CDA = 105°$ 2. $PQ = 6$ সেমি 3. $DC = 5$ সেমি 4. $BC = 3$ সেমি 5. $BD = 4$ সেমি 6. $\angle BAC = 45°$ 7. $AB = 13$ সেমি 8. $PQ = 1\cdot5$ সেমি 9. $AC = 3$ সেমি ; $BC = 3\cdot4$ সেমি 10. ΔPBQ-এর ক্ষেত্রফল 6 বর্গ সেমি, চতুর্ভুজ $PBCQ$-এর ক্ষেত্রফল 18 বর্গ সেমি 11. ΔAEF-এর ক্ষেত্রফল 10 বর্গ সেমি 12. $ID = 2$ সেমি, $IE = 2$ সেমি, 13. $BO = 2\cdot5$ সেমি $AO = 2\cdot5$ সেমি 14. $AF = 3$ সেমি, $GF = 2$ সেমি, $\Delta GEA = 1\cdot5$ বর্গসেমি, চতুর্ভুজ $BDGF = 3$ বর্গ সেমি $\Delta GBC = 3$ বর্গ সেমি 15 125° 16. $\angle BOC = 150°$ 17. $\angle BOA = 145°$ 18. DEF-এর ক্ষেত্রফল 3 বর্গ সেমি।

বিবিধ প্রশ্নমালা 2

1 (i) সামান্তরিক (ii) আয়তক্ষেত্র (iii) রম্বস (iv) বর্গক্ষেত্র (v) সমান (vi) দ্বিগুণ (vii) সমান্তরাল, দ্বিগুণ (viii) সমদ্বিখণ্ডিত 2. (i) পরিকেন্দ্র

(*ii*) লম্ববিন্দু (*iii*) ভরকেন্দ্র 3. (*i*) শুদ্ধ (*ii*) অশুদ্ধ (*iii*) অশুদ্ধ (*iv*) অশুদ্ধ (*v*) শুদ্ধ (*vi*) অশুদ্ধ (*vii*) শুদ্ধ 4. বর্গক্ষেত্র আয়তক্ষেত্রের বিশেষ রূপ, রম্বস সামান্তরিকের বিশেষ রূপ, সামান্তরিক চতুর্ভুজের বিশেষ রূপ, আয়তক্ষেত্র সামান্তরিকের বিশেষ রূপ 5. সামান্তরিক, সামান্তরিক, রম্বস, বর্গক্ষেত্র, আয়তক্ষেত্র।

বিবিধ প্রশ্নমালা 3

6. Q বিন্দুর অবস্থান এমন হবে যে $AB = BQ$.

বিবিধ প্রশ্নমালা 4

1. (*i*), (*ii*), (*iv*), (*v*), (*vi*), (*vii*), (*ix*), (*xi*) 2. (*i*) সামান্তরিক (*ii*) কাইট (*iii*) রম্বস (*iv*) আয়তক্ষেত্র (*v*) বর্গক্ষেত্র (*vi*) সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম 3. 4 সেমি 4. (*i*) একই সরলরেখা (*ii*) পরস্পর লম্ব (*iii*) সমরেখ (*iv*) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ (*v*) সমবাহু ত্রিভুজ (*vi*) 180° (*vii*) AC-এর মধ্যবিন্দুতে (*viii*) 2 সেমি (*ix*) 9 সেমি, 5 সেমি (*x*) সমরেখ 5. (*i*) লম্ব (*ii*) একই সরলরেখা (*iii*) ক্ষেত্রফল সমান (*iv*) পরস্পর সমান্তরাল (*v*) উচ্চতা সমান।

বিবিধ প্রশ্নমালা 5

1. $OA = OB = OC$ 2. পরস্পর সমান।

বিবিধ প্রশ্নমালা 6

12. পরস্পর সমান, পরস্পর সমান। 14. ট্রাপিজিয়ম 23. সর্বসম।

অনুশীলনী 16

1. 3 সেমি 2. 24 সেমি 3. 5·8 সেমি 4. 2 সেমি, 14 সেমি 5. 30 সেমি 6. 3·25 সেমি।

অনুশীলনী 17

1. $55^\circ, 110^\circ$ 2. 160°.

অনুশীলনী 18

1. $40^\circ, 60^\circ, 180^\circ$.

অনুশীলনী 20

1. 35° 2. 40°, 25°.

অনুশীলনী 22

1. 48°.

অনুশীলনী 24

1. (*i*) 6 একক (*ii*) 9 একক (*iii*) 4 একক 2. (*i*) না (*ii*) হ্যাঁ ।

অনুশীলনী 28

1. বৃত্তের উপরে 3. *D* বিন্দু বৃত্তের উপরে অবস্থিত 4. ব্যাসার্ধগুলি পরস্পর সমান 5. ঐ বৃত্তের উপর *B* বিন্দু অবস্থিত হবে, *ABCD* একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম 6. কেন্দ্র হবে কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু, ব্যাসার্ধটি হবে যেকোনো কর্ণের অর্ধেক ।

অনুশীলনী 29

1. (*i*) 1·6 সেমি (প্রায়) (*ii*) 1·9 সেমি (প্রায়) (*iii*) 2·2 সেমি (প্রায়) (*iv*) 2·3 সেমি (প্রায়) (*v*) 2 সেমি (প্রায়) (*vi*) 2·1 সেমি (প্রায়) (*vii*) 2·2 সেমি (প্রায়) 2. 4 সেমি (প্রায়), 2 সেমি (প্রায়) ; পরিব্যাসার্ধ অন্তর্ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ ।

অনুশীলনী 30

4. সমান্তরাল 4. বর্গক্ষেত্র ।

অনুশীলনী 31

1. 6 সেমি 2. *B* অথবা *C* বিন্দুতে 3. সাধারণ স্পর্শক 4. 90°.

অনুশীলনী 33

2. 10 সেমি, 8 সেমি ।

অনুশীলনী 34

1. (*i*) 3 সেমি (*ii*) 3·5 সেমি (প্রায়) (*iii*) 5·7 সেমি (প্রায়) (*iv*) 5·7 সেমি (প্রায়) (*v*) 5·5 সেমি (প্রায়) (*vi*) 6 সেমি 3. (*i*) 2·6 (প্রায়) (*ii*) 3·9 (প্রায়) (*iii*) 3·5 (প্রায়) (*iv*) 4·2 (প্রায়) (*v*) 4·9 (প্রায়) (*vi*) 5·5 (প্রায়) ।

বিবিধ প্রশ্নমালা 7

1. 4 সেমি, যাবে 2. 7 সেমি 3. 6·5 সেমি 4. 2 সেমি 5. 13 সেমি 6. 10 সেমি 7. (*ii*) 8. 91° 9. 70° 10. 114° 11. 90°, 65° 12. $\angle BDC = 125°$, $\angle DCA = 125°$, $\angle CAB = 55°$, $\angle ABD = 55°$, 13. $\angle BAC = 60°$, $\angle ABC = 50°$, $\angle BCA = 70°$; $\angle EAC = 20°$, $\angle CEA = 130°$, $\angle ACE = 30°$ 14. 8 সেমি, 8 সেমি, 9·6 সেমি, 3·6 সেমি 15. 12 সেমি, 6 সেমি 16. 5 সেমি 17. 5 সেমি, 4 সেমি, 3 সেমি ; সমকোণী ত্রিভুজ ।

বিবিধ প্রশ্নমালা 8

1. (*i*) তিনটি (*ii*) সমদ্বিখণ্ডিত (*iii*) 90° (*iv*) অর্ধেক (*v*) সমান (*vi*) সমকোণ, সূক্ষ্মকোণ, স্থূলকোণ (*vii*) সম্পূরক (*viii*) সমবৃত্তস্থ (*ix*) বৃত্তস্থ (*x*) লম্বভাবে (*xi*) সমান, সমান, সমদ্বিখণ্ডক, লম্বভাবে, সমদ্বিখণ্ডিত (*xii*) সমরেখ, বৃত্ত, ব্যাসার্ধের, সমষ্টি (*xiii*) সরলরেখায়, বৃত্ত, ব্যাসার্ধের, অন্তর (*xiv*) সমানুপাতে (*xv*) সমান্তরাল (*xvi*) অনুরূপ, সমানুপাতী (*xvii*) সমানুপাতী, সদৃশকোণী (অথবা সদৃশ) (*xviii*) সদৃশ, নিজেরা, সদৃশ (*xix*) অতিভুজের, বর্গের, সমষ্টির, সমান (*xx*) সমকোণ ।

2. (*i*) সমদ্বিখণ্ডিত (*ii*) সমবিন্দু, বিন্দুটি, উপর (*iii*) সমদ্বিবাহু (*iv*) আয়তক্ষেত্র (*v*) ব্যাস (*vi*) সমান্তরাল (*vii*) লম্বভাবে, সমদ্বিখণ্ডিত (*viii*) সমান (*ix*) লম্ব, সমদ্বিখণ্ডকের, ছেদবিন্দু (*x*) সমদ্বিখণ্ডক 3. (*i*) যেকোনো তিনটি অসমরেখ বিন্দু দিয়ে একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কন করা যাবে (*ii*) শুদ্ধ (*iii*) কোন বৃত্তের একই চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ হবে (*iv*) সদৃশকোণী দুটি ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী (*v*) বৃত্তের কোনো ব্যাসার্ধের যে প্রান্তবিন্দুটি কেন্দ্র নয় সেই প্রান্তবিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব ঐ বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক হবে (*vi*) বৃত্তের উপর অবস্থিত দুটি বিন্দু যদি কোনো ব্যাসের প্রান্তবিন্দু না হয়, তাহলে ঐ দুটি বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটি অবশ্যই পরস্পরকে ছেদ করবে (*vii*) শুদ্ধ (*viii*) শুদ্ধ (ix) শুদ্ধ (*x*) শুদ্ধ ।

বিবিধ প্রশ্নমালা 9

1. জ্যা, যেকোনো দুটি বাহুকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে, লম্ব সমদ্বিখণ্ডক দুটির ছেদবিন্দু ও যেকোনো শীর্ষবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ। 2. স্পর্শক, যেকোনো দুটি কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, সমদ্বিখণ্ডক দুটির ছেদবিন্দু থেকে যেকোনো বাহুর উপর লম্ব অঙ্কন করে। 3. তারা লম্বভাবে অবস্থিত। 4. 90°, 90°. 5. (*i*) সমকোণী ত্রিভুজ (*ii*) দুটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের অন্তরের সমান (*iii*) *AB*-এর মধ্যবিন্দুকে কেন্দ্র করে *AB*-এর অর্ধেকের সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে এবং *A*-কে কেন্দ্র করে দুটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের অন্তরের সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে দুটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করে (অথবা, *A*-কে কেন্দ্র করে দুটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের অন্তরের সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করে এবং *AB*-কে ব্যাস করে একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করে) (*iv*) *AR*-কে বর্ধিত করলে যে বিন্দুতে বৃত্তকে ছেদ করবে সেটিই *P* (*v*) *P* বিন্দু দিয়ে *RB*-এর সমান্তরাল অঙ্কন করে। 7. আয়তক্ষেত্র 8. (*i*) সমকোণী ত্রিভুজ (*ii*) দুটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমষ্টির সমান (*iii*) *AB*-এর মধ্যবিন্দুকে কেন্দ্র করে *AB*-এর অর্ধেকের সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে এবং *A*-কে কেন্দ্র করে দুটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমষ্টির সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে দুটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করে (অথবা, *A*-কে কেন্দ্র করে দুটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমষ্টিকে ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করে এবং *AB*-কে ব্যাস করে একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করে) (*iv*) *AR* যে বিন্দুতে বৃত্তকে ছেদ করবে সেইটেই *P* (*v*) *P* বিন্দু দিয়ে *RB*-এর সমান্তরাল অঙ্কন করে 10. $b^2 = ac, AD, AD, BC = a + b$, *BC*-কে ব্যাস করে একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করতে হবে, *D* বিন্দু থেকে *BC*-এর উপর লম্ব অঙ্কন করে 11. $AC, BD = a - b$, *BC*-কে ব্যাস করে একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করতে হবে, *D* বিন্দু থেকে *BC*-এর উপর লম্ব অঙ্কন করে 12. সমকোণী ত্রিভুজ, *a* ও *b*-এর মধ্য-সমানুপাতী হল $\sqrt{ab}$ 13. 4·9 প্রায়।

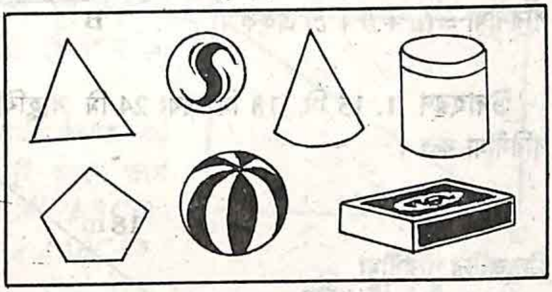
বিবিধ প্রশ্নমালা 10

27. না, 'দুটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে, তাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী হবে'—প্রমাণ করতে গিয়ে এই ধর্ম ব্যবহার করা হয়েছে, কিন্তু এই ধর্মটি প্রতিষ্ঠা করার জন্য আবার উপরোক্ত ধর্মটি ব্যবহার করতে হয়েছে।

পরিমিতি

প্রথম অধ্যায়
ত্রিভুজ

সপ্তম শ্রেণীতে তোমরা আয়তক্ষেত্র ও বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে শিখেছ। আয়তক্ষেত্র, বর্গক্ষেত্র, ছাড়াও দৈনন্দিন জীবনে আমরা আরও নানা ধরণের চিত্র বা বস্তু দেখতে পাই যার কয়েকটির নমুনা চিত্র নং 1-এ দেওয়া হল।

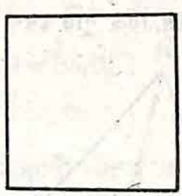


চিত্র নং : 1

বিভিন্ন প্রয়োজনে আমাদের সে-সব চিত্র বা বস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, উচ্চতা, ক্ষেত্রফল, আয়তন ইত্যাদি নির্ণয় করতে হয়। দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, পরিসীমা, ক্ষেত্রফল ও আয়তন মাপার এই ব্যবহারিক বিদ্যাকে গণিত শাস্ত্রে পরিমিতি বলা হয়।



চিত্র নং : 2



চিত্র নং : 3

সপ্তম শ্রেণীতে তোমরা শিখেছ,

আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা = 2(দৈর্ঘ্য + প্রস্থ)

আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ

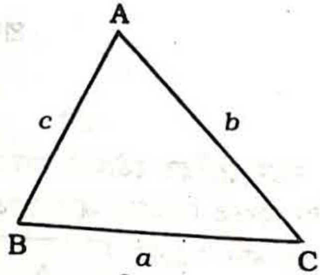
বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা = 4 × একটি বাহুর দৈর্ঘ্য

বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $(\text{বাহুর দৈর্ঘ্য})^2$

এবার তোমরা আয়তক্ষেত্র এবং বর্গক্ষেত্র ছাড়াও ত্রিভুজ ও বৃত্তের পরিসীমা, ক্ষেত্রফল কিভাবে নির্ণয় করা যায় তা শিখবে।

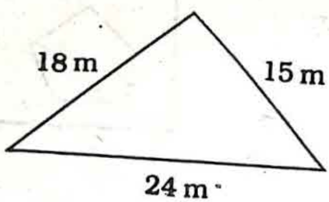
ত্রিভুজের পরিসীমা ঃ

যদি ABC ত্রিভুজাকৃতি মাঠের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b ও c একক হয়, তবে এই মাঠটিকে ঘিরতে ABC ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টির সমান দৈর্ঘ্যের বেড়া লাগবে । তাই ত্রিভুজটির পরিসীমা $= (a + b + c)$ একক ।



চিত্র নং ঃ 4

উদাহরণ **1.** 15 মি, 18 মি এবং 24 মি বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের পরিসীমা কত ?

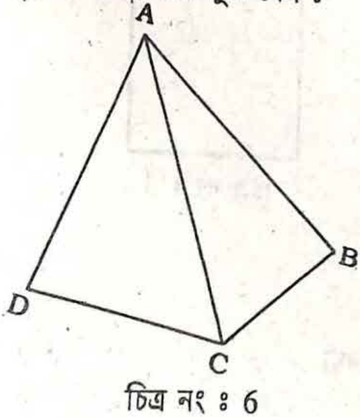


চিত্র নং ঃ 5

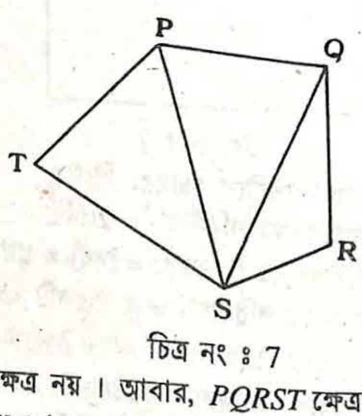
ত্রিভুজটির পরিসীমা
$= (15 + 18 + 24)$ মিটার
$= 57$ মিটার

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ঃ

তোমরা বর্গক্ষেত্র ও আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বের করতে শিখেছে । কিন্তু বাস্তব ক্ষেত্রে দেখা যায়, সব জমি বা ক্ষেত্র বর্গাকার বা আয়তক্ষেত্রাকার নয় । পরের চিত্র দুটি দেখ ঃ



চিত্র নং ঃ 6



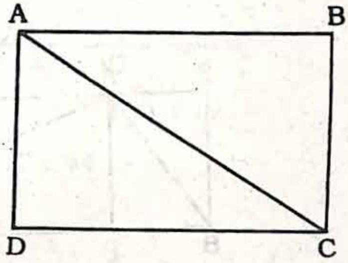
চিত্র নং ঃ 7

$ABCD$ চতুর্ভুজটি আয়তক্ষেত্র বা বর্গক্ষেত্র নয় । আবার, $PQRST$ ক্ষেত্রটি একটি পঞ্চভুজ আকৃতি বিশিষ্ট । সুতরাং আয়তক্ষেত্র বা বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

নির্ণয়ের সূত্র দিয়ে এদের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা সম্ভব নয় । কিন্তু একটু লক্ষ করলেই দেখতে পাবে, এদের একাধিক ত্রিভুজে পরিণত করা যায় । আমরা যদি সেই ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারি, তবে সহজেই এ ধরণের ক্ষেত্রগুলির ক্ষেত্রফল পেতে পারি । তাছাড়া স্বতন্ত্রভাবে ত্রিভুজাকৃতি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের প্রয়োজনও বিভিন্ন সময়ে দেখা দেয় । তাই ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের প্রশ্নটি খুবই জরুরী । ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্রটি কি করে পাওয়া যায় দেখ ঃ

আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সূত্র অনুসারে $ABCD$ আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল = $DC \times AD$

তোমরা জান, আয়তক্ষেত্রের কর্ণ আয়তক্ষেত্রকে সমান দুই অংশে ভাগ করে । এখানে AC কর্ণ $ABCD$ আয়তক্ষেত্রকে ΔADC ও ΔABC-তে ভাগ করেছে ।



চিত্র নং ঃ 8

অতএব লেখা যায়,

ADC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} ABCD$ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} DC \times AD$

$= \frac{1}{2}$ ভূমি × উচ্চতা

যেহেতু, ADC ত্রিভুজের DC = ভূমি এবং AD = উচ্চতা ।

সুতরাং বলা যায়, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ ভূমি × উচ্চতা ;

মন্তব্য ঃ লক্ষ কর, এক্ষেত্রে ত্রিভুজ দুটিই সমকোণী ত্রিভুজ এবং যে বাহু দুটি পরস্পর লম্ব, তাদের একটি ভূমি হলে অপরটি উচ্চতা ।

উদাহরণ 2. মনে কর, উপরের $ABCD$ আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 18 মিটার ও প্রস্থ 12 মিটার । ABC ত্রিভুজের বা ADC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত ?

আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (18 x 12) বর্গ মিটার = 216 বর্গ মিটার

$\therefore$ ABC বা ADC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = (216 ÷ 2) বর্গ মিটার ।

= 108 বর্গ মিটার ।

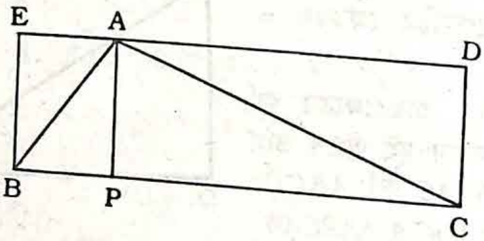
অর্থাৎ ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = ADC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}$ ভূমি × উচ্চতা

$= \frac{1}{2} . (18 \times 12)$ বর্গ মি = 108 বর্গ মি

সুতরাং ΔABC বা ΔADC-এর ক্ষেত্রফল 108 বর্গ মিটার।

উপরে যে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা হয়েছে তারা এক একটি সমকোণী ত্রিভুজ। কিন্তু ত্রিভুজটি যদি সমকোণী না হয়ে যেকোনো প্রকার ত্রিভুজ হয়, তাহলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র কি হবে ?



চিত্র নং ঃ 9

উপরের চিত্রে ABC একটি বিষমবাহু ত্রিভুজ।

A শীর্ষবিন্দু দিয়ে ভূমি BC-এর সমান্তরাল টেনে এবং ঐ সমান্তরাল সরলরেখার উপর BE ও CD লম্ব টেনে $BCDE$ আয়তক্ষেত্রটি পাওয়া গেল, যার ভূমি BC এবং উচ্চতা BE ; আবার $BE = AP$ = ত্রিভুজটির উচ্চতা।

তোমরা জান, যেহেতু ত্রিভুজ ABC এবং আয়তক্ষেত্র $BCDE$ একই ভূমি এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore ABC$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} BCDE$ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} BC.BE$

$= \frac{1}{2} BC.AP$

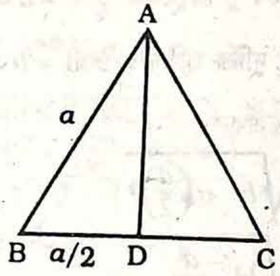
$= \frac{1}{2}$ ভূমি × উচ্চতা

সুতরাং বলা যায়, যেকোনো প্রকারের ত্রিভুজই হোক না কেন,

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ ভূমি × উচ্চতা

সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ঃ

ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ যার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান এবং AD মধ্যমাটি ত্রিভুজটির উচ্চতা সূচিত করে।



চিত্র নং ঃ 10

মনে কর, ABC সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য a ; সুতরাং

$AB = a$ একক এবং $BD = \frac{1}{2} BC = \frac{a}{2}$ একক

তোমরা জান, $AD^2 = AB^2 - BD^2$

$\therefore AD = \sqrt{AB^2 - BD^2}$

$= \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ একক

$= \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$ একক $= \frac{\sqrt{3}}{2} a$ একক

সমবাহু ত্রিভুজের উচ্চতা $= \frac{\sqrt{3}}{2} \times$ বাহুর দৈর্ঘ্য

এবং সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

$= \frac{1}{2} a . \frac{\sqrt{3}}{2} a$ বর্গ একক

$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ বর্গ একক

সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4}$ (বাহু)^2

উদাহরণ 3. 4 সেমি বাহুবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2$ বর্গ সেমি

$= 4\sqrt{3}$ বর্গ সেমি

সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ঃ

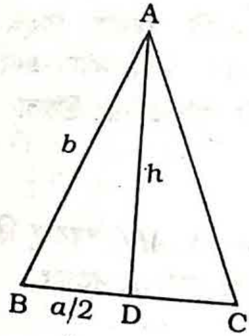
ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি $= a$ একক,

সমান বাহু দুটির প্রতিটির দৈর্ঘ্য $= b$ একক,

উচ্চতা $= h$ একক,

$$\therefore h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$$



চিত্র নং ঃ 11

$\therefore$ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ABC-এর ক্ষেত্রফল

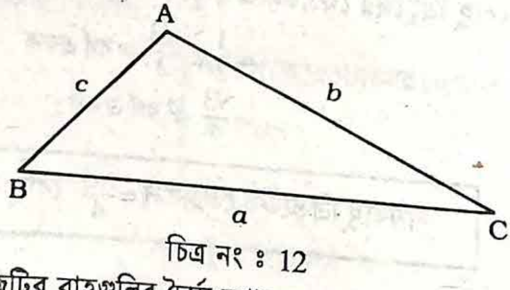
$$= \frac{1}{2} a . \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} \text{ বর্গ একক}$$

উদাহরণ 4. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি 8 সেমি এবং সমান বাহুর প্রতিটির দৈর্ঘ্য 10 সেমি ; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর ।

ত্রিভুজের নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} \times 8 \sqrt{(10)^2 - \frac{8^2}{4}} \text{ বর্গ সেমি} = 8\sqrt{21} \text{ বর্গ সেমি}$$

কোন ত্রিভুজের বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য জানা থাকলে, তা থেকে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করার সূত্র ঃ



চিত্র নং ঃ 12

উপরের ত্রিভুজটির বাহুগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b ও c একক

$\therefore$ ত্রিভুজটির পরিসীমা $= (a + b + c)$ একক

$\therefore$ পরিসীমার অর্ধেক বা অর্ধ-পরিসীমা $= s = \dfrac{a+b+c}{2}$ একক

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক

উদাহরণ **5.** একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 26 সেমি, 28 সেমি ও 30 সেমি। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$$s = \frac{26 + 28 + 30}{2} \text{ সেমি} = \frac{84}{2} \text{ সেমি} = 42 \text{ সেমি ।}$$

$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \sqrt{42(42-26)(42-28)(42-30)}$ বর্গ সেমি

$= \sqrt{42 \times 16 \times 14 \times 12}$ বর্গ সেমি

$= \sqrt{7 \times 6 \times 6 \times 2 \times 2 \times 7 \times 4 \times 4}$ 4 বর্গ সেমি

$= 7 \times 6 \times 4 \times 2$ বর্গ সেমি

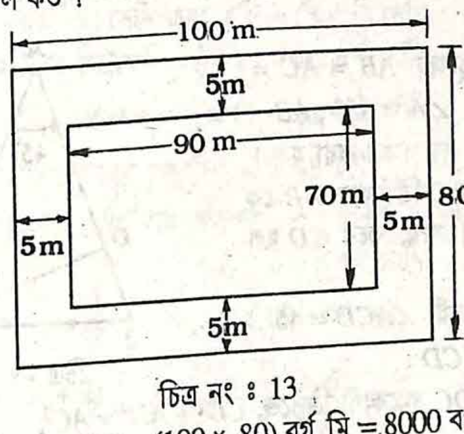
$= 336$ বর্গ সেমি ।

বিবিধ উদাহরণ ঃ

উদাহরণ **1.** একটি আয়তাকার বাগানের ক্ষেত্রফল 55 বর্গ মিটার এবং প্রস্থ 5 মিটার 5 ডেসিমিটার, বাগানটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

$$\text{দৈর্ঘ্য} = \frac{\text{ক্ষেত্রফল}}{\text{প্রস্থ}} = \frac{55}{5\cdot5} \text{ মিটার} = 10 \text{ মিটার ।}$$

উদাহরণ **2.** একটি আয়তাকার বাগানের দৈর্ঘ্য 100 মিটার ও প্রস্থ 80 মিটার। বাগানের ভিতরে চারদিকে 5 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে, রাস্তাটির ক্ষেত্রফল কত ?



চিত্র নং ঃ 13

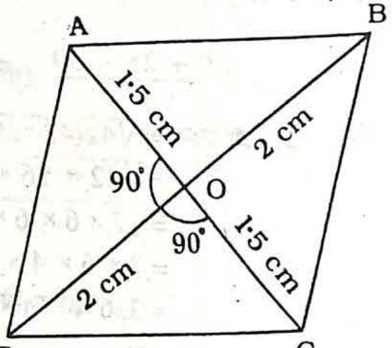
রাস্তা সহ বাগানের ক্ষেত্রফল $= (100 \times 80)$ বর্গ মি $= 8000$ বর্গ মি

রাস্তা ছাড়া বাগানের " $= [\{100-(5 \times 2)\} \times \{80-(5 \times 2)\}]$ বর্গ মি

$= (90 \times 70)$ বর্গ মি $= 6300$ বর্গ মি

$\therefore$ রাস্তার ক্ষেত্রফল $= (8000 - 6300)$ বর্গ মি $= 1700$ বর্গ মি

উদাহরণ **3.** কোনো সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় যথাক্রমে 3 সেমি ও 4 সেমি এবং কর্ণদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণগুলির প্রত্যেকটি 90° হলে সামান্তরিকের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। সামান্তরিকটির বৈশিষ্ট্য কি ?



চিত্র নং ঃ 14

আমরা জানি, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে,

অর্থাৎ $AO = OC = 1\cdot5$ সেমি

এবং $BO = OD = 2$ সেমি

প্রশ্নের শর্তানুযায়ী AOB একটি সমকোণী ত্রিভুজ

$\therefore AB = \sqrt{2^2 + 1\cdot5^2}$ সেমি

$= \sqrt{4 + 2\cdot25}$ সেমি $= \sqrt{6\cdot25}$ সেমি $= 2\cdot5$ সেমি

$\therefore AB = DC = 2\cdot5$ সেমি

অনুরূপভাবে, $BC = AD = 2\cdot5$ সেমি

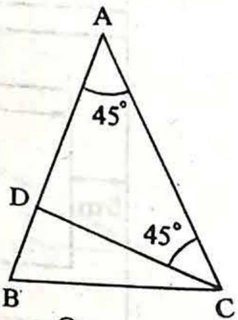
$\therefore$ সামান্তরিকটির প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য $2\cdot5$ সেমি,

সামান্তরিকটি একটি রম্বস।

উদাহরণ **4.** একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 10 সেমি এবং বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ 45°. ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

ABC ত্রিভুজের $AB = AC =$ 10 সেমি এবং $\angle A = 45°$; AB-এর উপর CD লম্ব অঙ্কন করা হল।

এবার, ABC ত্রিভুজের AB-কে যদি ভূমি ধরা যায়, তবে CD হল উচ্চতা।



চিত্র নং ঃ 15

অঙ্কন অনুযায়ী $\angle ACD = 45°$,

$\therefore AD = CD$

আবার ADC সমকোণী ত্রিভুজে, $CD^2 + AD^2 = AC^2$

$= 10^2$ বর্গ সেমি $= 100$ বর্গ সেমি

$\therefore 2CD^2 = 100$ বর্গ সেমি $\quad \therefore CD^2 = 50$ বর্গ সেমি

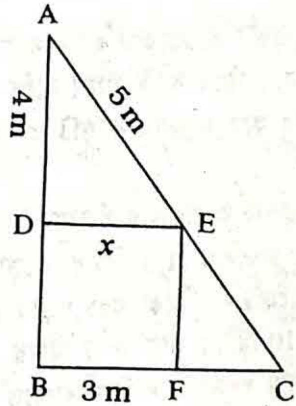
$\therefore CD = \sqrt{50}$ সেমি $= 5\sqrt{2}$ সেমি

$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}.AB.CD$

$= \frac{1}{2}.10.5\sqrt{2}$ বর্গ সেমি $= 25\sqrt{2}$ বর্গ সেমি

উদাহরণ 5. একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে 3, 4 এবং 5 সেন্টিমিটার। এই ত্রিভুজটির মধ্যে এরূপ একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করা হল, যার একটি কৌণিক বিন্দু ত্রিভুজের অতিভুজের উপর আছে এবং সেই কৌণিক বিন্দুর বিপরীত কৌণিক বিন্দুসংলগ্ন বাহু দুটি ত্রিভুজের অপর দুটি বাহুর উপর আছে। বর্গক্ষেত্রটির বাহুর দৈর্ঘ্য কত হবে ?

পাশের চিত্রে ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3 সেমি, 4 সেমি ও 5 সেমি এবং এর মধ্যে $BDEF$ বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করা হয়েছে, যার E কৌণিক বিন্দু AC অতিভুজের উপর রয়েছে এবং BD ও BF বাহু যথাক্রমে BA ও BC বাহুর উপর আছে।



চিত্র নং ঃ 16

এখন, বর্গক্ষেত্রটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে হবে।

মনে করি, বর্গক্ষেত্রটির বাহুর দৈর্ঘ্য $= x$ সেমি

$AD = (4-x)$ সেমি এবং $CF = (3-x)$ সেমি

ΔADE-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\times(4-x)x$ বর্গ সেমি

ΔEFC-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\times(3-x)x$ বর্গ সেমি

$BDEF$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= x^2$ বর্গ সেমি

কিন্তু তোমরা জান ΔABC-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\times 4\times 3$ বর্গ সেমি

$= 6$ বর্গ সেমি

সুতরাং, $x^2 + \frac{1}{2}(4-x)\,x + \frac{1}{2}(3-x)x = 6$

বা, $x^2 + 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} - \frac{x^2}{2} = 6$

বা, $\frac{7x}{2} = 6$, $\therefore x = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$

বর্গক্ষেত্রটির বাহুর দৈর্ঘ্য হবে $1\frac{5}{7}$ সেন্টিমিটার

প্রশ্নমালা 1

1. একটি আয়তাকার বাগানের দৈর্ঘ্য 15 মিটার এবং প্রস্থ 10 মিটার। বাগানটির ক্ষেত্রফল ও পরিসীমা কত ?

2. একটি আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা 120 মিটার এবং তার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অন্তর 12 মিটার। আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল কত ?

3. একটি সামান্তরিকের একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 75 মিটার এবং তার সন্নিহিত দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 70 মিটার ও 65 মিটার। সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

4. একটি আয়তাকার প্লটের সামনের দিকে 16 বর্গ মিটার জায়গা বাগান করার জন্য রেখে দিয়ে বাকি অংশে বাড়ি করা হয়েছে। এর ফলে প্লটটি দৈর্ঘ্যের দিকে 2 মিটার কমে যাওয়ায় বাড়িটি বর্গাকার হয়েছে। বাড়িটি কতটুকু জায়গার উপরে আছে ?

5. একটি আয়তাকার প্রাঙ্গণের দৈর্ঘ্য 15 মিটার এবং প্রস্থ 12 মিটার। প্রাঙ্গণটির ভিতরে চারদিকে 1·5 মিটার চওড়া রাস্তা করতে প্রতি বর্গমিটার 2·25 টাকা হিসাবে মোট কত টাকা খরচ পড়বে ?

6. 10 মিটার দীর্ঘ ও 7 মিটার চওড়া একটি উঠোন 20 সেমি দীর্ঘ এবং 17·5 সেমি চওড়া টালি দিয়ে বাঁধাতে কতগুলি টালি লাগবে ?

7. 60 মিটার দীর্ঘ ও 45 মিটার প্রশস্ত একটি আয়তাকার জমিকে দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের সমান্তরাল দুটি আল দিয়ে সমান চারভাগে ভাগ করা হয়েছে। যদি আল দুটি 6 ডেসিমি চওড়া হয়, তবে প্রতি খণ্ড জমির ক্ষেত্রফল কত হবে ? আলের জন্য কত জমি নষ্ট হবে ?

8. একটি ত্রিভুজের ভূমি 14 সেমি এবং উচ্চতা 5 সেমি। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত ?

9. 14 সেমি, 13 সেমি ও 18 সেমি বাহুবিশিষ্ট ত্রিভুজের পরিসীমা কত ?

10. একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য 8 সেমি হলে, ত্রিভুজটির উচ্চতা কত এবং তার ক্ষেত্রফল কত ?

11. একটি সমবাহু ত্রিভুজের উচ্চতা 15 সেমি হলে, ত্রিভুজটির পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল কত ?

12. প্রমাণ কর যে, একটি সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমান সমকোণের ধারক বাহু দুটির গুণফলের সাংখ্যমানের অর্ধেক ; তা থেকে যে সমকোণী ত্রিভুজে সমকোণের ধারক বাহু দুটি যথাক্রমে 7 সেমি এবং 12 সেমি, তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

13. একটি সমকোণী ত্রিভুজে সমকোণের দুপাশের বাহু দুটি যথাক্রমে 12 সেমি এবং 5 সেমি ; সমকৌণিক বিন্দু থেকে অতিভুজের উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। (তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান)।

14. একটি সমবাহু ত্রিভুজের উচ্চতা $4\sqrt{3}$ সেমি হলে, তার ক্ষেত্রফল এবং পরিসীমা কত ?

15. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি 6 সেমি এবং সমান দুই বাহুর প্রত্যেকটি 5 সেমি। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত ?

16. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহু দুটির দৈর্ঘ্য 10 সেমি এবং ত্রিভুজটির উচ্চতা 8 সেমি ; তৃতীয় বাহুটির দৈর্ঘ্য কত এবং ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত ?

17. একটি ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 25 সেমি, 39 সেমি ও 56 সেমি হলে, বৃহত্তম বাহুটির উপর বিপরীত কৌণিক বিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

18. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 15 সেমি এবং তৃতীয় বাহু দ্বারা সমান বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য 12 সেমি। ত্রিভুজটির পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল কত ?

19. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 15 সেমি, 20 সেমি ও 25 সেমি। ত্রিভুজটির বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কৌণিক বিন্দু থেকে ঐ বাহুটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

20. একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 10 সেমি, 14 সেমি এবং 16 সেমি। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং তা থেকে দেখাও যে বিপরীত কৌণিক বিন্দু থেকে বৃহত্তম বাহুর লম্ব-দূরত্ব $5\sqrt{3}$ সেমি।

21. ত্রিভুজাকৃতি একটি পার্কের বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের অনুপাত 2 : 3 : 4 ; পার্কটির পরিসীমা 108 মিটার হলে, তার ক্ষেত্রফল কত ? পার্কটির বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কৌণিক বিন্দু থেকে ঐ বাহুতে সোজাসুজি যেতে কত পথ হাঁটতে হবে ?

22. সাটির পাড়া, নরসিংহী ও হাজীপুর গ্রাম তিনটি একই সরলরেখায় নয় ; তাদের পারস্পরিক দূরত্ব যথাক্রমে 823 মিটার, 1250 মিটার ও 1327 মিটার। যদি এই তিনটি জায়গার পরস্পর যোগাযোগকারী রাস্তা তৈরি করতে হয়, তবে কত দীর্ঘ রাস্তা তৈরি করতে হবে ? প্রতি মিটারে 9·45 টাকা খরচ পড়লে রাস্তা তৈরি করতে কত টাকা খরচ হবে ?

23. 45 মিটার দীর্ঘ একটি নারকেল গাছ ঝড়ে মচকে গিয়ে তার অগ্রভাগ গাছটির গোড়া থেকে 15 মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করল। গাছটির গোড়া ও তার অগ্রভাগ যুক্ত করলে ত্রিভুজটি গঠিত হবে, তার ক্ষেত্রফল কত ?

24. 16 ডেসিমি দীর্ঘ ও 12 ডেসিমি প্রশস্ত একটি আয়তাকার লোহার পাত থেকে 8টি সমান টুকরো কাটা হয়েছে। টুকরোগুলি যদি এমন সমকোণী

ত্রিভুজাকারের হয় যাদের সমকোণ সংলগ্ন বাহু দুটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অর্ধেক, তবে প্রতিটি টুকরোর পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল কত হবে যদি পাতের কোনো অংশ নষ্ট না হয় ?

25. 20 মিটার উঁচু একটি চিমনির চূড়া স্পর্শ করে 25 মিটার লম্বা একটি মই স্থাপন করা হল। চিমনির পাদদেশ থেকে মই-এর দূরত্ব 12 সেমি হলে, মইটির গোড়া চিমনির পাদদেশ থেকে কত দূরে থাকবে ?

26. কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের অনুপাত 4 : 5 : 7 এবং ত্রিভুজের পরিসীমা 144 মিটার হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত ?

27. দুটি জাহাজের গতিবেগ ঘন্টায় যথাক্রমে 60 কিমি এবং 90 কিমি। জাহাজ দুটি একই বন্দর থেকে একই সময়ে রওয়ানা হয়। প্রথম জাহাজটি যায় উত্তরদিকে এবং দ্বিতীয় জাহাজটি যায় পূর্বদিকে। এক ঘন্টা পর জাহাজ দুটির পারস্পরিক দূরত্ব কত হবে ?

28. 35 মিটার এবং 11 মিটার উঁচু দুটি লাইট-পোষ্টের পাদদেশের মধ্যে দূরত্ব 10 মিটার, লাইট-পোষ্ট দুটির শীর্ষদেশের দূরত্ব কত ?

29. দুটি ত্রিভুজের উচ্চতার অনুপাত 3 : 4 এবং তাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত 4 : 3 হলে, তাদের ভূমির দৈর্ঘ্যের অনুপাত কত হবে ?

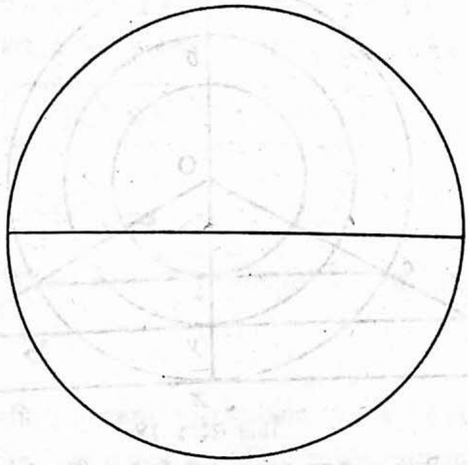
30. একটি আয়তাকার কাঠের টুকরো থেকে সবচেয়ে বড় মাপের যে ত্রিভুজাকৃতি টুকরো কাটা যায় তার ক্ষেত্রফল 54 বর্গ সেমি। কাঠের টুকরোটির দৈর্ঘ্য প্রস্থের $\frac{4}{3}$ গুণ হলে, তার কর্ণ দুটির দৈর্ঘ্য কত ?

দ্বিতীয় অধ্যায়

বৃত্ত

বৃত্তের পরিধি

44 সেমি দীর্ঘ একটি সরু নরম তার বাঁকিয়ে নিচের চিত্রের মতো একটি বৃত্ত তৈরি কর। তাহলে বৃত্তের পরিধি হবে 44 সেমি। এবার তার ব্যাসটি মেপে দেখ।



চিত্র নং ঃ 17

দেখবে, ব্যাসের দৈর্ঘ্য হবে প্রায় 14 সেমি। এবার পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত নিলে পাবে,

পরিধি ঃ ব্যাস = 44 : 14 (প্রায়) = 22 : 7 (প্রায়)

অনুরূপভাবে, 66 সেমি তার নিয়ে বৃত্ত তৈরি করলে তার ব্যাস পাবে প্রায় 21 সেমি।

এখানেও, পরিধি ঃ ব্যাস = 66 : 21 (প্রায়) = 22 : 7 (প্রায়)

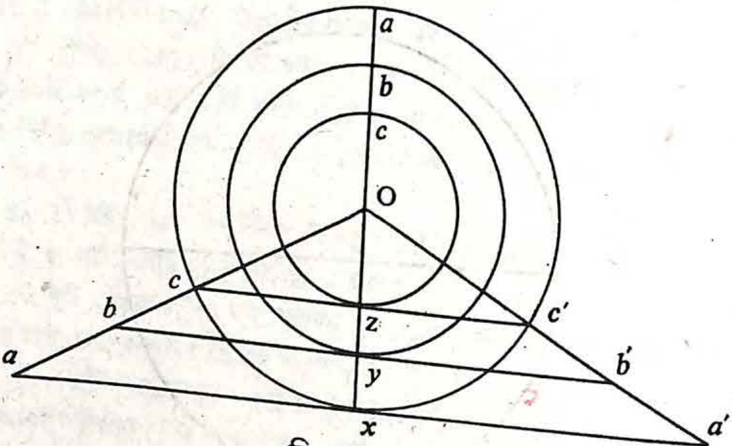
এমনিভাবে বিভিন্ন দৈর্ঘ্যের তার নিয়ে বৃত্ত তৈরি করলে তাদের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত প্রতিক্ষেত্রে প্রায় 22 : 7 পাবে।

এ থেকে বলা যায় বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের দৈর্ঘ্যের মধ্যে একটি নির্দিষ্ট আনুপাতিক সম্পর্ক রয়েছে, আর তা হল,

বৃত্ত-পরিধি ঃ ব্যাস = 22 : 7 (প্রায়)

অন্য আরও একটি ব্যবহারিক পরীক্ষা ও জ্যামিতিক প্রক্রিয়ার সাহায্যে বিষয়টি দেখানো যায়।

একটি বড় পিচ বোর্ড নিয়ে তাতে নিচের চিত্রের মতো 7 সেমি, 10·5 সেমি ও 14 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট সমকেন্দ্রিক তিনটি বৃত্ত আঁক এবং এমন একটি সাধারণ ব্যাস আঁক, যা বৃত্ত তিনটিকে যথাক্রমে c, z ; b, y এবং a, x বিন্দুতে ছেদ করে।



চিত্র নং ঃ 18

এবার তিন টুকরো নরম সরু তার বাঁকিয়ে তিনটি বৃত্ত পরিধির উপর এমনভাবে স্থাপন কর, যেন তাদের খোলা মুখগুলি যথাক্রমে তাদের সাধারণ ব্যাসের c, b ও a বিন্দুতে মিলিত হয়। এবার তার তিনটিকে সোজা করে এমনভাবে স্থাপন কর যাতে তারগুলি চিত্রের মতো যথাক্রমে ব্যাসের অপর বিন্দু z, y ও x-এ ব্যাসগুলির সঙ্গে লম্ব ভাবে থাকে এবং তারগুলির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে z, y ও x বিন্দুর সঙ্গে মিশে যায়।

স্বভাবিকভাবেই a, b, c বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় আছে। নতুন অবস্থানে তারের প্রান্তগুলি যুক্ত করে বর্ধিত করলে দেখা যাবে যে তারা এমন একটি সরলরেখায় আছে যে সরলরেখা কেন্দ্র O এর মধ্য দিয়ে যাবে। নতুন অবস্থানে তারগুলির দুটি প্রান্তবিন্দু যথাক্রমে c', c'' ; b', b'' এবং a', a'' হলে, মেপে দেখ $a''a', b''b'$ ও $c''c'$-এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে প্রায় 44 সেমি, 33 সেমি ও 22 সেমি।

$$\text{এখন, } \Delta Oc''z\text{-এ } \frac{c''z}{Oz} = \frac{22}{7} \text{ (প্রায়)}$$

$$\therefore \frac{c''c'}{cz} = \frac{2c''z}{2Oz} = \frac{\text{পরিধি}}{\text{ব্যাস}} = \frac{22}{7} \text{ (প্রায়)}$$

অনুরূপে $\Delta Ob''y$ এবং $Oa''z$ থেকেও আমরা দেখব, $\frac{\text{পরিধি}}{\text{ব্যাস}}=\frac{22}{7}$ (প্রায়)

$\therefore$ এ থেকে পাওয়া যায়, $\frac{\text{পরিধি}}{\text{ব্যাস}}=\frac{22}{7}$ (প্রায়)

বৃত্ত-পরিধি ও ব্যাসের এই অনুপাতকে গণিতে π (পাই) চিহ্ন দ্বারা বুঝানো হয়,

সুতরাং, $\frac{\text{বৃত্ত-পরিধি}}{\text{ব্যাস}}=\pi$

$\therefore$ বৃত্ত-পরিধি $=\pi\times$ ব্যাস $=\pi\times 2$ ব্যাসার্ধ $=2\pi$ ব্যাসার্ধ

এবার, বৃত্তের ব্যাসার্ধকে যদি r একক ধরা হয় ; বৃত্ত-পরিধির সূত্রটি হবে

বৃত্ত-পরিধি $=2\pi r$ একক

অনুসিদ্ধান্ত, $r=\frac{\text{বৃত্ত-পরিধি}}{2\pi}$ একক

মন্তব্য ঃ মনে রাখবে, π-এর মান সাধারণত $\frac{22}{7}$ ধরা হয় । π-এর প্রকৃত মান নির্ণয় সম্ভব নয় ।

উদাহরণ 1. একটি গোলাকার পার্কের ব্যাস 35 মিটার । পার্কটির চারদিকে লোহার রেলিং দিয়ে ঘিরতে কত মিটার রেলিং প্রয়োজন হবে ?

তোমরা জান, পার্কটি ঘিরতে পার্কটির পরিধির সমান দৈর্ঘ্যের রেলিং প্রয়োজন ।

পার্কটির ব্যাসার্ধ যদি r মিটার ধরা হয়,

তবে $r=\frac{35}{2}=17{\cdot}5$

$\therefore$ পার্কটির পরিধি $=2\pi\times r$ মিটার

$=2\times\frac{22}{7}\times 17{\cdot}5$ মিটার

$=110$ মিটার

সুতরাং পার্কটি ঘিরতে 110 মিটার রেলিং লাগবে ।

উদাহরণ 2. একটি গরুর গাড়ির চাকার ব্যাস 1·05 মিটার । 495 মিটার পথ যেতে গাড়িটির চাকা কতবার ঘুরবে ?

তোমরা জান, চাকাটি একবার ঘুরলে তার পরিধির সমান দূরত্ব যাবে ।

চাকার পরিধি $=2\pi\times{\cdot}525$ মিটার ।

$= 2 \times \frac{22}{7} \times$ ·525 মিটার = 3·3 মিটার

সুতরাং, 495 মিটার যেতে গাড়ির চাকা (495 ÷ 3·3) বার ঘুরবে
= 150 বার ঘুরবে ।

উদাহরণ **3.** একটি ট্রেনের চাকার ব্যাসার্ধ 0·35 মিটার । এক মিনিটে ট্রেনের চাকা 450 বার ঘুরলে ট্রেনটির গতিবেগ কত ?

ট্রেনটির চাকার পরিধি $= 2\pi \times$ 0·35 মিটার

$= 2 \times \frac{22}{7} \times$ 0·35 মিটার = 2·2 মিটার

∴ 1 মিনিটে ট্রেনটি যায় (2·2 × 450) মিটার = 990 মিটার

∴ 1 ঘণ্টা বা 60 মিনিটে ট্রেনটি যায় (990 × 60) মিটার
= 59400 মিটার

সুতরাং ট্রেনটির গতিবেগ ঘণ্টায় 59·4 কিমি

উদাহরণ **4.** 4·2 মিটার বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গাকার জমিতে সবচেয়ে বড় মাপের গোলাকার যে ইঁদারা কাটা যায়, তার বাইরের পরিসীমা কত মিটার হবে ?

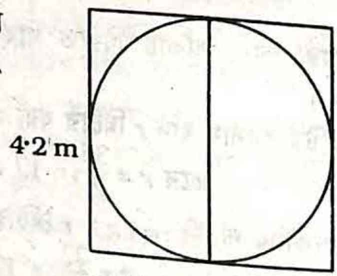
পাশের ছবিটি দেখে বুঝতে পারছ, সবচেয়ে বড় মাপের ইঁদারাটির ব্যাস বর্গক্ষেত্রের বাহুর সমান, অর্থাৎ 4·2 মিটার ।

∴ ইঁদারাটির পরিসীমা

$= 2\pi \times$ 2·1 মিটার

$= 2 \times \frac{22}{7} \times$ 2·1 মিটার

= 13·2 মিটার



চিত্র নং ঃ 19

∴ ইঁদারাটির বাহিরের পরিসীমা 13·2 মিটার হবে ।

উদাহরণ **5.** একটি ষ্টিম-ইঞ্জিনের সামনের চাকার ব্যাস 35 সেমি এবং পিছনের চাকার ব্যাস 84 সেমি । যে দূরত্ব যেতে সামনের চাকা 600 বার ঘোরে, সেই দূরত্ব যেতে পিছনের চাকা কতবার ঘুরবে ?

সামনের চাকার পরিধি $= 2 \times \pi \times$ 17·5 সেমি

পিছনের চাকার পরিধি $= 2 \times \pi \times$ 42 সেমি

এখন, সামনের চাকা 600 বার ঘুরলে ট্রেনটি যাবে

$2 \times \pi \times 17{\cdot}5 \times 600$ সেমি

সুতরাং, ঐ দূরত্ব যেতে পিছনের চাকা ঘুরবে

$$\frac{2 \times \pi \times 17{\cdot}5 \times 600}{2 \times \pi \times 42} = 250 \text{ বার}$$

উত্তর ঃ পিছনের চাকা 250 বার ঘুরবে।

প্রশ্নমালা 2

1. একটি গোলাকার পার্কের ব্যাস 42 মিটার। পার্কটির চারদিকে লোহার রেলিং দিয়ে ঘিরতে কত মিটার রেলিং লাগবে ?

2. 35 সেমি ব্যাস বিশিষ্ট একটি গোলাকার তারের রিং তৈরি করতে কত লম্বা তার লাগবে ?

3. 4 মিটার ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি গোলাকার এলাকা বাঁশের বেড়া দিয়ে ঘিরতে প্রতি মিটার 4·55 টাকা হিসাবে কত খরচ হবে ?

4. একটি বাই-সাইকেলের চাকার ব্যাস 42 সেমি। 16·5 কিমি পথ যেতে সাইকেলের চাকা কতবার ঘুরবে ?

5. খেলার মাঠে যে গোলাকার ট্র্যাক্ কাটা হয়েছে তার ব্যাসার্ধ যদি 35 মিটার হয়, তবে 440 মিটার এবং 1100 মিটার দৌড়ের জন কত পাক ঘুরতে হবে ?

6. একটি চাকার পরিধি ও ব্যাসের অন্তর 75 সেমি হলে, ঐ চাকার ব্যাসার্ধ কত ?

7. 49 মিটার ব্যাসের বৃত্তাকার ট্র্যাকে রাম ও শ্যাম একই জায়গা থেকে একই সময়ে প্রতিযোগিতা শুরু করে। রাম যখন দশ পাক ঘুরে প্রতিযোগিতা শেষ করে, তখন শ্যাম এক পাক পিছনে থাকে। প্রতিযোগিতাটি কত মিটারের ছিল এবং রাম শ্যামকে কত মিটারে পরাজিত করেছে ?

8. একটি ট্রেনের চাকার ব্যাসার্ধ 0·245 মিটার। এক মিনিটে চাকাটি 500 বার ঘুরলে ট্রেনটির গতিবেগ কত ?

9. একটি কপিকলের উপর দিয়ে একটি দড়ি টানার সময় কপিকলটি মিনিটে 115 বার পূর্ণ আবর্তন করে এবং দড়ির গতি মিনিটে 2530 সেমি হয়। কপিকলটির ব্যাস নির্ণয় কর।

10. একটি তার দিয়ে একটি বৃত্তাকার রিং তৈরি করলে তার ব্যাস হয় 5·6 ডেসিমি। ঐ তার দিয়ে একটি বর্গাকার ক্ষেত্র তৈরি করলে ঐ বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য কত হবে ?

11. একটি তারের তৈরি বর্গক্ষেত্রের প্রতিটি বাহু 33 সেমি । ঐ তার দিয়ে একটি বৃত্ত তৈরি করলে বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কত হবে ?

12. দুটি বৃত্তের পরিধির অনুপাত 2 : 3 এবং তাদের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অন্তর 2 সেমি । তাদের প্রত্যেকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য কত ?

13. অর্ধবৃত্তাকার একটি পার্ক বেড়া দিয়ে ঘিরতে 162 মিটার লম্বা বেড়া লাগে । ব্যাসের দিকে পার্কটির দৈর্ঘ্য কত ?

14. একটি ধাতু-বলয়ের ভিতরের দিকের পরিধি 132 সেমি এবং বাইরের দিকের পরিধি 154 সেমি । বলয়টি কত সেমি চওড়া ?

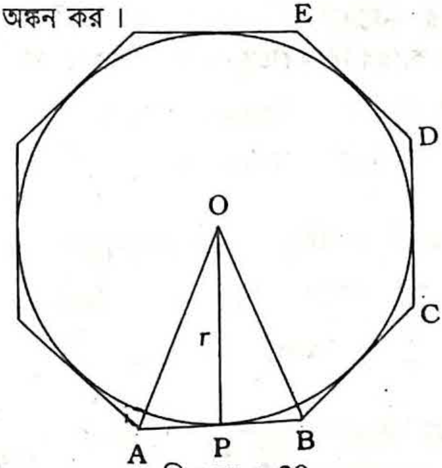
15. 24·5 মিটার বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গাকার জমির মধ্যে বৃত্তাকার বেড়া দিয়ে সবচেয়ে বেশি পরিমাণ জায়গা ঘিরতে কত লম্বা বেড়া প্রয়োজন হবে ? জায়গাটি যদি চৌকো অবস্থাতেই ঘেরা হতো, তবে কত বেশি বেড়া প্রয়োজন হতো ?

16. 196 বর্গ সেমি ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি বর্গাকার পিতলের চাদর থেকে সবচেয়ে বড় অথচ সমান চারটি বৃত্তাকার প্লেট কাটা হল । প্রতিটি প্লেটের পরিধি কত হবে ?

17. একটি মোটরের চাকার সঙ্গে বেল্ট দিয়ে একটি মেসিনের চাকা যুক্ত আছে । মোটরের চাকার ব্যাস 14 সেমি এবং মেসিনের চাকার ব্যাস 94·5 সেমি । মোটরের চাকা যদি প্রতি সেকেণ্ডে 27 বার ঘোরে, তবে মেসিনের চাকা ঘণ্টায় কতবার ঘুরবে ?

বৃত্তের ক্ষেত্রফল ঃ

নিচের চিত্রের মতো কোনো একটি বৃত্তের পরিলিখিত একটি অসংখ্য বাহুবিশিষ্ট বহুভূজ অঙ্কন কর।



চিত্র নং ঃ 20

এখন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের পদ্ধতিতে অতি সহজেই বহুভূজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পার।

বৃত্তটির ব্যাসার্ধ যদি r একক হয়, তবে

বহুভুজের ক্ষেত্রফল $= \left(\frac{1}{2}AB.r + \frac{1}{2}BC.r + \frac{1}{2}CD.r + \ldots\ldots\right)$

$= \frac{1}{2}(AB + BC + CD + \ldots\ldots)\, r$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}$ বহুভুজের পরিসীমা $\times\, r$ বর্গ একক

এবার পরিলিখিত বহুভুজের বাহুর সংখ্যা যত বাড়ানো হবে, ততই তার পরিসীমা বৃত্তের পরিসীমা অর্থাৎ বৃত্তের পরিধির কাছাকাছি হবে এবং অসংখ্য বাহুবিশিষ্ট বহুভুজের ক্ষেত্রফল কার্যত বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সমান হবে।

$\therefore$ বহুভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ বহুভুজের পরিসীমা $\times\, r$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}$ বৃত্ত-পরিধি $\times\, r$ বর্গ একক

$=$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল

সুতরাং, বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ বৃত্ত-পরিধি $\times\, r$ বর্গ একক

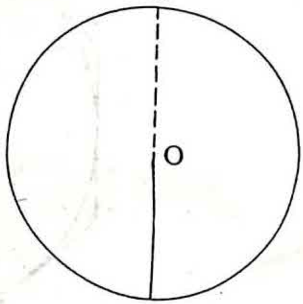
$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r$ বর্গ একক $= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r$ বর্গ একক $= \pi r^2$ বর্গ একক

$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গ একক

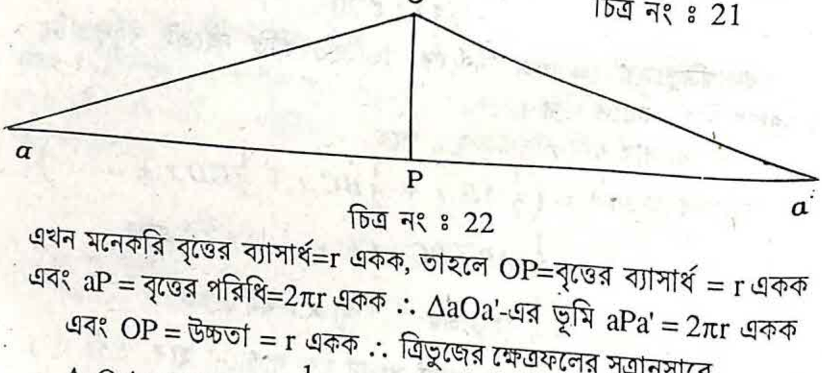
এটি নির্ণয় করার অপর একটি পদ্ধতি আছে।

21 নং এবং 22 নং চিত্র দুটি বিচার কর।

21 নং চিত্রের বৃত্তটিকে যদি Oa বরাবর কেটে প্রসারিত করা হয়, তাহলে Δ aoa' আকারের চিত্রে (চিত্র নং 22) পরিণত হবে।



চিত্র নং ঃ 21



চিত্র নং ঃ 22

এখন মনেকরি বৃত্তের ব্যাসার্ধ=r একক, তাহলে OP=বৃত্তের ব্যাসার্ধ = r একক এবং aP = বৃত্তের পরিধি=$2\pi r$ একক ∴ ΔaOa'-এর ভূমি aPa' = $2\pi r$ একক

এবং OP = উচ্চতা = r একক ∴ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সূত্রানুসারে

ΔaOa' এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 2\pi r.r = \pi r^2$ = বৃত্তের ক্ষেত্রফল

∴ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$

উদাহরণ **1.** একটি গোলাকার টেবিলের ব্যাস 1·4 মিটার। টেবিলটির উপরিতলের ক্ষেত্রফল কত ?

টেবিলটির উপরিতলের ক্ষেত্রফল $= \frac{22}{7} \times (0{\cdot}7)^2$ বর্গ মিটার

= 1·54 বর্গ মিটার

উদাহরণ **2.** 3·5 মিটার লম্বা একটি দড়ি দিয়ে একটি গরুকে একটি খুঁটির সঙ্গে বেঁধে রাখলে গরুটি কতটুকু জমির ঘাস খেতে পারবে ?

গরুটি যতটুকু জমির ঘাস খেতে পারবে তার ক্ষেত্রফল হবে 3·5 মিটার ব্যাসার্ধের গোলাকার জমির ক্ষেত্রফলের সমান।

∴ জমির ক্ষেত্রফল $= \pi \times (3{\cdot}5)^2$ বর্গ মি

$= (\frac{22}{7} \times 3{\cdot}5 \times 3{\cdot}5)$ বর্গ মি $= 38{\cdot}5$ বর্গ মি

∴ গরুটি 38·5 বর্গমিটার জমির ঘাস খেতে পারবে।

উদাহরণ **3.** 784 বর্গ সেমি ক্ষেত্রফলের একটি বর্গাকার লোহার প্লেট থেকে সবচেয়ে বড় যে গোলাকার চাকতিটি পাওয়া যায় তার ক্ষেত্রফল কত ?

চাকতিটির ব্যাস = বর্গক্ষেত্রটির বাহু = $\sqrt{784}$ সেমি = 28 সেমি

∴ চাকতিটির ক্ষেত্রফল $= (\frac{22}{7} \times 14 \times 14)$ বর্গ সেমি

$= 616$ বর্গ সেমি

উদাহরণ **4.** একটি গোলাকার পার্কের ব্যাস 56 মিটার। পার্কটির বাইরের চারপাশে 3·5 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে। প্রতি বর্গ মিটার 8·40 টাকা হিসাবে রাস্তাটি বাঁধাতে কত খরচ পড়বে ?

রাস্তার ক্ষেত্রফল = রাস্তাসহ পার্কের ক্ষেত্রফল – পার্কের ক্ষেত্রফল

$= (\pi \times 31{\cdot}5^2 - \pi \times 28^2)$ বর্গ মি

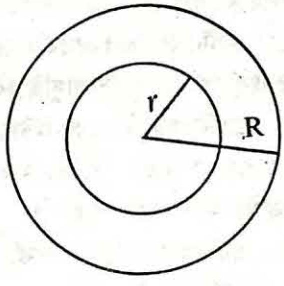
$= \pi (31{\cdot}5 + 28)(31{\cdot}5 - 28)$ বর্গ মি

$= (\frac{22}{7} \times 59{\cdot}5 \times 3{\cdot}5)$ বর্গ মি $= 654{\cdot}5$ বর্গ মি

∴ রাস্তাটি বাঁধাতে খরচ পড়বে $(654{\cdot}5 \times 8{\cdot}40)$ টা. $= 549{\cdot}80$ টা.

একটি বলয়াকৃতি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

একটি বলয়াকৃতি ক্ষেত্র দুটি বৃত্ত-পরিধি দ্বারা সীমাবদ্ধ। বাইরের বৃত্তের ব্যাসার্ধ R একক এবং ভিতরের বৃত্তের ব্যাসার্ধ r একক হলে, বলয়াকৃতি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হবে $\pi (R^2 - r^2)$ বর্গ একক।



চিত্র নং : 23

∴ বলয়াকৃতি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \pi (R^2 - r^2)$ বর্গ একক

উদাহরণ 5. একটি বলয়াকৃতি লোহার পাতের অন্তর্ব্যাস 20 সেমি এবং বহির্ব্যাস 22 সেমি। বলয়টিতে কত বর্গ সেমি লোহার পাত আছে ? প্রতি বর্গ মিটার লোহার পাতের ওজন 2 কুইন্টাল 55 কেজি হলে, এই বলয়টির ওজন কত হবে ?

বলয়টিতে লোহার পাত আছে

$$\pi(11^2 - 10^2) \text{ বর্গ সেমি}$$
$$= \frac{22}{7} \times 21 \text{ বর্গ সেমি}$$
$$= 66 \text{ বর্গ সেমি}$$
$$= \frac{66}{10000} \text{ বর্গ মিটার}$$

আবার 1 বর্গ মিটার পাতের ওজন 255 কেজি

∴ $\frac{33}{5000}$ বর্গ মিটার " " = 1·683 কেজি

সুতরাং বলয়টির ওজন হবে 1 কেজি 683 গ্রাম

প্রশ্নমালা 3

1. নিচে কয়েকটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ দেওয়া আছে, বৃত্তগুলির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর ঃ

(*i*) 42 মিটার (*ii*) 7 সেমি (*iii*) 6·3 মিটার (*iv*) 4 মি 9 ডেসিমি

2. যে বৃত্তের পরিধি 44 সেমি, সেই বৃত্তের ক্ষেত্রফল কত ?

3. যে বৃত্তাকার বাগানের বেড়ার দৈর্ঘ্য 132 মিটার, তার ব্যাস কত ? তার ক্ষেত্রফলই বা কত ?

4. একটি বৃত্তাকার পার্কের ক্ষেত্রফল 616 বর্গ মিটার ; বৃত্তটির ব্যাস বরাবর পার্কের একপ্রান্ত থেকে সোজাসুজি বিপরীত প্রান্তে যেতে কত পথ হাঁটতে হবে ?

5. একটি গরুকে 3·5 মিটার লম্বা দড়ি দিয়ে একটি খুঁটির সঙ্গে বেঁধে ঘাস খেতে দেওয়া হয়েছে। দড়িটি যদি 4·2 মিটার লম্বা হতো, তবে গরুটি আর কত বেশি জমির ঘাস খেতে পারত ?

6. অর্ধবৃত্তাকার একটি পার্ককে বেড়া দিয়ে ঘিরতে 144 মিটার লম্বা রেলিং লাগে। পার্কটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

7. একটি বৃত্তাকার মাঠের বাইরে চারদিকে সম-পরিসরের একটি পথ আছে। পথটির বাইরের সীমারেখার দৈর্ঘ্য ভিতরের সীমারেখার দৈর্ঘ্য অপেক্ষা 132 মিটার অধিক। পথটির ক্ষেত্রফল 9702 বর্গ মি হলে, মাঠটির ক্ষেত্রফল কত ?

8. একটি বলয়াকৃতি লোহার পাতের ভিতরের ও বাইরের ব্যাস যথাক্রমে 18 সেমি ও 32 সেমি। বলয়টিতে কত বর্গ সেমি পাত আছে ?

9. একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল 154 বর্গ সেমি। ঐ বৃত্তটি যে বর্গক্ষেত্র দ্বারা পরিবৃত, তার পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

10. 14 মিটার বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গাকার কার্ডবোর্ড থেকে যতদূর সম্ভব বড় এবং সমান চারটি বৃত্তাকার টুকরো কেটে নেওয়ার পর আর কতখানি কার্ডবোর্ড অবশিষ্ট থাকবে ?

11. একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হলে, তাদের পরিসীমার অনুপাত নির্ণয় কর।

12. একটি বলয়াকৃতি তামার পাতে 269·5 বর্গ সেমি পাত আছে। যদি বলয়টির বাইরের দিকের ব্যাস 28 সেমি হয়, তবে তার ভিতরের দিকের ব্যাস কত ?

13. পরিখাসহ একটি বৃত্তাকার দুর্গের চারপাশের বৃত্তাকার পরিখাটি 7 মিটার চওড়া এবং তার ক্ষেত্রফল 29414 বর্গমিটার। দুর্গটি কত বর্গ মিটার জায়গা জুড়ে আছে ?

14. সমবাহু ত্রিভুজাকৃতি একটি কাঠের তক্তার ক্ষেত্রফল 84 বর্গ সেমি। সেই তক্তা থেকে 7 সেমি ব্যাসের একটি গোলাকার চাকতি কেটে নিলে আর কত বর্গ সেমি কাঠ পড়ে থাকবে ?

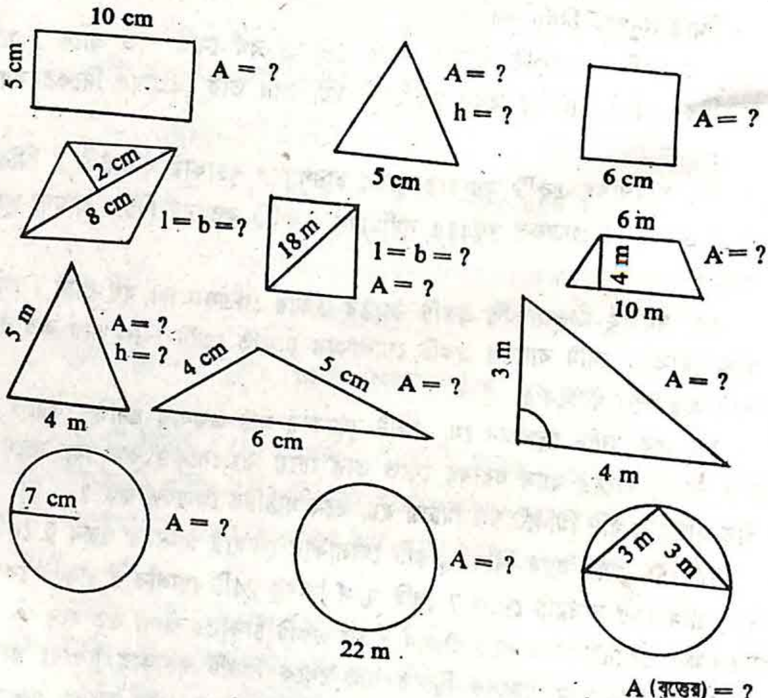
15. এক ব্যক্তি দেখলেন যে, একটি বৃত্তাকার মাঠ একবার প্রদক্ষিণ করতে যে সময় লাগে, মাঠের ব্যাস বরাবর যেতে তার চেয়ে 30 সেকেণ্ড কম সময় লাগে। তাঁর গতিবেগ যদি মিনিটে 90 মিটার হয়, তবে মাঠটির ক্ষেত্রফল কত ?

16. 56 সেমি ব্যাস বিশিষ্ট একটি গোলাকার লোহার চাদরের ওজন 9 কেজি 856 গ্রাম। ঐ চাদরটি থেকে 7 সেমি ব্যাস বিশিষ্ট 24টি গোলাকার চাকতি কেটে নিলে কত ওজনের চাদর পড়ে থাকবে ? এক একটি চাকতির ওজন কত হবে ?

17. একটি সুষম ওজনের টিনের পাত থেকে তিনটি বৃত্তাকার টুকরো কাটা হল। টুকরো তিনটির ব্যাসের অনুপাত যদি 3 : 5 : 7 হয়, তবে তাদের ওজনের অনুপাত কত হবে ?

বিবিধ প্রশ্নমালা

1. নিম্নলিখিত চিত্রগুলি থেকে সংশ্লিষ্ট প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ
[যদি ক্ষেত্রফল $= A$, দৈর্ঘ্য $= l$, প্রস্থ $= b$ ও উচ্চতা $= h$ হয়].



চিত্র নং ঃ 24

2. পরিসীমা নির্ণয় কর ঃ

   (i) যে ত্রিভুজের তিনটি বাহু যথাক্রমে 11 সেমি, 13 সেমি ও 15 সেমি ।

   (ii) যে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের দুটি সমান বাহুর একটি 10 সেমি ও ভূমি 7 সেমি ।

(iii) যে সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহু দুটি যথাক্রমে 21 ডেসিমি ও 28 ডেসিমি।

(iv) যে সমবাহু ত্রিভুজের উচ্চতা $6\sqrt{3}$ মিটার।

(v) যে সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $4\sqrt{3}$ বর্গ মিটার।

(vi) যে সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু 5 সেমি ও 9 সেমি।

(vii) যে বর্গক্ষেত্রের একটি কর্ণ 32 মিটার।

(viii) যে রম্বসের দুটি কর্ণ 6 সেমি ও 8 সেমি।

(ix) যে বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 42·25 বর্গ সেমি।

(x) যে বৃত্তের ব্যাস 14 মিমি।

3. শূন্যস্থান পূরণ কর : [ত্রিভুজের ক্ষেত্রে]

	ভূমি	উচ্চতা	ক্ষেত্রফল	
(i)	16 মি	—	80 বর্গ মি	
(ii)	—	13 মি	195 বর্গ মি	
(iii)	8 মি	—	—	[সমবাহু ত্রিভুজ]
(iv)	—	18 সেমি	—	[সমবাহু ত্রিভুজ]

4. একটি সমকোণী ত্রিভুজের পরিসীমা ও অতিভুজ যথাক্রমে 30 সেমি ও 13 সেমি ; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত ?

5. যদি কোনো ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 4·5 মি বাহু বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্র-ফলের সমান হয় ; এবং ত্রিভুজটির একটি বাহু তার বিপরীত শীর্ষবিন্দু থেকে 7·5 মি দূরে অবস্থিত হয়, তবে ত্রিভুজের ঐ বাহুটির দৈর্ঘ্য কত হবে ?

6. সুবীর 13·5 মিটার পথ সোজা দক্ষিণদিকে গেল, তারপর 12 মিটার পথ সোজা পশ্চিমদিকে গেল এবং অবশেষে 10 মিটার পথ সোজা উত্তর দিকে গেল ; সে প্রথম স্থান থেকে সরাসরি কত দূরে গেল ?

7. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি ও সমান বাহু দুটির একটির অনুপাত 3 : 2 এবং পরিসীমা 28 সেমি। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

8. কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3 : 4 : 5 এবং ক্ষেত্রফল 7776 বর্গ মিটার। ত্রিভুজটির বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য ও পরিসীমা নির্ণয় কর।

9. একটি সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা 24 সেমি ; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত ?

10. গৌরীপুর, লালপুর ও জিয়ারকান্দী গ্রাম তিনটি [বিন্দু হিসাবে ধরলে] পরস্পর সমদূরত্বে অবস্থিত। ট্রান্সফরমার বসাতে মাখনবাবু এমন একটি জায়গা খুঁজছেন, যা ঐ তিনটি গ্রাম থেকেই সমান দূরে হবে। গৌরীপুর থেকে জিয়ারকান্দী $2\sqrt{3}$ কিমি দূরে হলে, জায়গাটি কোথায় হবে তা নির্ণয় কর।

11. একটি আয়তাকার বাগানের দৈর্ঘ্য 85 মিটার ও প্রস্থ 65 মিটার। বাগানের বাইরে চারপাশে একটি 1·5 মিটার চওড়া রাস্তা আছে। রাস্তাটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

12. বি. টি. পি. এস. টাউনশিপ এলাকা চারটি রাস্তা AB, BC, CD, DA দ্বারা সীমাবদ্ধ এবং এলাকার ভিতরের দিকের ক্ষেত্রফল 87646 বর্গ মিটার। $AB = 442$ মিটার, $CD = 370$ মিটার, A বিন্দু থেকে CD-এর দূরত্ব $AE = 216$ মিটার ও $EC = 280$ মিটার ; AD ও BC-এর দৈর্ঘ্য কত ?

13. 16 সেমি দৈর্ঘ্য ও 4 সেমি প্রস্থ বিশিষ্ট কোনো কার্ড-বোর্ডের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রাকার কার্ড-বোর্ডের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য কত হবে ?

14. 10 সেমি প্রস্থ ও 40 সেমি দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট কতগুলো টালি দিয়ে 16 মিটার বাহু বিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রের মেঝে আচ্ছাদিত করা যায় ?

15. তুলসীবাবু 32 মিটার দীর্ঘ এবং 25 মিটার প্রশস্ত একখণ্ড জমি ক্রয় করেন। বাড়ি করার সময় তিনপাশে 1·5 মিটার করে জমি ছেড়ে এবং বাগান করার জন্য সামনের দিকে কিছু জমি ছেড়ে বাকি জমিতে বাড়ি করেন। বাড়িটি যদি বর্গাকার জমির উপর অবস্থিত হয়, তবে তার ক্ষেত্রফল কত ? বাগান করার জন্য বাড়ির সামনে কত জায়গা রয়েছে ?

16. কোনো রম্বসের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 25 সেমি, একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 40 সেমি অপর কর্ণটির দৈর্ঘ্য কত ?

17. একটি আয়তাকার জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 3 : 2 এবং ক্ষেত্রফল 11094 বর্গমিটার। প্রতি মিটার 2·50 টাকা হিসাবে ঐ জমিতে বেড়া দিতে কত খরচ হবে ?

18. 150 মিটার দীর্ঘ ও 84·5 মিটার প্রশস্ত একখণ্ড জমিতে মাঝামাঝি 2·5 মিটার চওড়া দুটি রাস্তা তৈরি করে জমিটিকে সমান চারিটি প্লটে বিভক্ত করা হল। প্রতিটি প্লটের ক্ষেত্রফল কত হবে ? রাস্তাটি তৈরি করতে যদি প্রতি বর্গমিটারে 5·25 টাকা খরচ হয়ে থাকে, তবে মোট কত খরচ হয়েছে ?

19. 1025 বর্গমিটার ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ট্রাপিজিয়ম আকৃতির একটি জমির সমান্তরাল আল দুটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 35 মিটার ও 47 মিটার। জমিটির বিপরীত কোণদ্বয় বরাবর একটি দাগ দিয়ে জমিটি দু'ভাগ করলে খণ্ড দুটির ক্ষেত্রফল কি হবে ? এই প্রসঙ্গে দেখাও যে, খণ্ড দুটির ক্ষেত্রফলের অনুপাত সমান্তরাল বাহু দুটির অনুপাতের সমান হবে।

20. 21 সেমি বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রের মধ্যে সর্ববৃহৎ যে বৃত্তটি আঁকা যায় তার ক্ষেত্রফল কত হবে ?

21. একটি বৃত্তাকার পার্কের ব্যাসার্ধ 210 মিটার। যদি স্বাগতা প্রতি ঘণ্টায় 5·5 কিমি বেগে হেঁটে পার্কটি পরিক্রমা করতে চায়, তবে তার কত সময় লাগবে ?

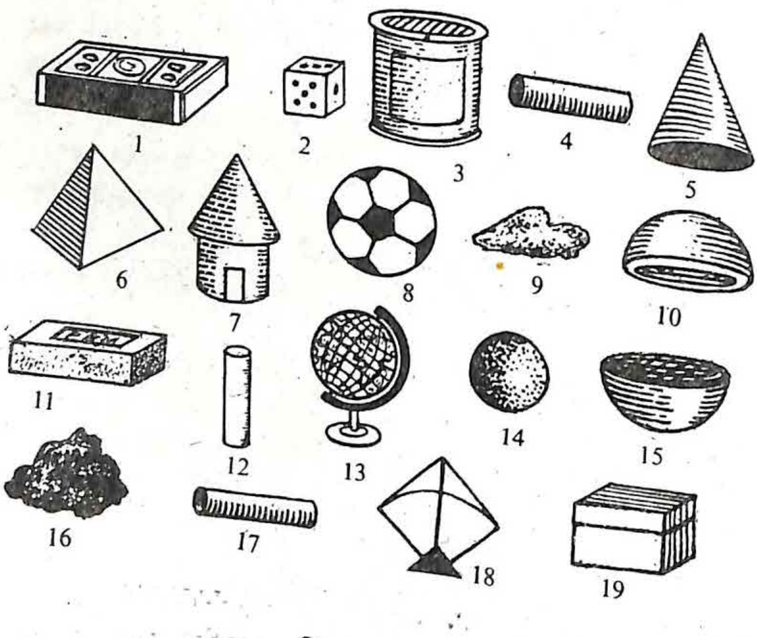
22. একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্রের পরিধি 88 মিটার, যার বাইরের চারিদিকে 3·5 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে। যদি প্রতি বর্গমিটারে 4·50 টাকা হিসাবে খরচ করে রাস্তাটি মেরামত করতে হয়, তবে মোট কত খরচ হবে ?

23. 35 সেমি ব্যাস বিশিষ্ট একটি লোহার পাতের চাকতির ওজন 4·5 কেজি। ঐ চাকতি থেকে 3·5 সেমি চওড়া একটি বলয়াকৃতি টুকরো কেটে লওয়া হল। বলয়টির ওজন যদি চাকতির ওজনের $\frac{1}{5}$ অংশ হয়, তবে বলয়টির অন্তর্ব্যাস ও বহির্ব্যাস নির্ণয় কর। এর ফলে লোহার পাতের যে তিনটি টুকরো পাওয়া যাবে তাদের ওজনের অনুপাত কি হবে ?

তৃতীয় অধ্যায়

সমকোণী চৌপল

সপ্তম শ্রেণীতে তোমরা আয়তক্ষেত্র, বর্গক্ষেত্র ইত্যাদি সামতলিক ক্ষেত্রের পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল বের করতে শিখেছ। নবম শ্রেণীতে নানাপ্রকার ত্রিভুজ ও বৃত্তের পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় করেছ। এ সবই ছিল সামতলিক ক্ষেত্র বা চিত্র। কিন্তু প্রাত্যাহিক জীবনে আমাদের নানাপ্রকার ঘনবস্তু বিভিন্নভাবে ব্যবহার করতে হয়। তাদের আকৃতিও নানাপ্রকার। আবার তাদের উপরি-



চিত্র নং ঃ 25

ভাগ এক বা একাধিক তল দ্বারা গঠিত। এদের আর একটি প্রধান বৈশিষ্ট্য হল, এরা কিছু না কিছু স্থান জুড়ে থাকে।

তাই একদিকে যেমন এইসব ঘনবস্তু যেসব বিভিন্ন তল দিয়ে তৈরি তাদের পরিসীমা, ক্ষেত্রফল ইত্যাদি জানা প্রয়োজন, তেমনি এদের কোনটি কি পরিমাণ স্থান দখল করে থাকে, তার পরিমাপ করার প্রয়োজনও দেখা দেয়। এই অধ্যায়ে আমরা সেই পরিমাপ পদ্ধতি আলোচনা করব।

ঘনবস্তুগুলির আকৃতি ও গঠন প্রকৃতি লক্ষ করলে যে বিষয়গুলি পাওয়া যায় তা দেখ ঃ

1 নং চিত্রটি একটি দেশলাই বাক্সের চিত্র। তোমরা জান একটি দেশলাই বাক্স 6টি তল দ্বারা তৈরি এবং তার প্রতিটি তল আয়তাকার। সেইরূপ 11 নং চিত্রের ইঁট এবং 19 নং চিত্রের জলের ট্যাঙ্কের তলগুলিও আয়তাকার। 2 নং চিত্রের লুডুর ছকটিরও 6টি তল আছে, কিন্তু সেই তলগুলি বর্গাকার।

3 নং চিত্রের কৌটোটির উপরের ও নিচের তল দুটি বৃত্তাকার আর চারদিক ঘিরে রয়েছে একটি বক্রতল। 4, 12, 17 নং চিত্রের ঘনবস্তুগুলির আকৃতিও অনুরূপ।

5 নং চিত্রের মোচার নিচের দিকটা বৃত্তাকার এবং চারপাশের বক্রতলটির একদিকে যেমন বৃত্তকার অপর দিকে আছে একটি শীর্ষবিন্দু। 7 নং চিত্রের তাবুর উপরের অংশটিও অনুরূপ।

8 নং চিত্রের ফুটবলটি একটি মাত্র বক্রতল দ্বারা তৈরি। 13, 14 নং চিত্রের বস্তুগুলিও অনুরূপ।

আবার 10 ও 15 নং চিত্রের বস্তুগুলি দুটি তল দিয়ে তৈরি, একটি বৃত্তাকার অপরটি বক্রতল।

কিন্তু 9 নং চিত্রের মাটির ঢেলা এবং 16 নং চিত্রের কয়লার টুকরোটির তলগুলিকে কোনো নির্দিষ্ট পরিচিত নামে প্রকাশ করা যায় না।

ফুটবল, ভূ-গোলক ও লোহার বলটি বাদ দিলে বাকি সব ঘনবস্তুগুলিকে আমরা **একাধিক তল বিশিষ্ট ঘনবস্তু** বলতে পারি।

আবার মাটির ঢেলা ও কয়লার টুকরো বাদ দিলে অন্য ঘনবস্তুগুলি কোনো না কোনো পরিচিত নির্দিষ্ট আকৃতি বিশিষ্ট তল দ্বারা তৈরি। তাই এইসব ঘনবস্তুকে আমরা **সুষম আকৃতির ঘনবস্তু** বলতে পারি। এবং মাটির ঢেলা ও কয়লার টুকরোকে **বিষম আকৃতির ঘনবস্তু** বলতে পারি।

এই অধ্যায়ে আমরা কয়েক প্রকার সুষম আকৃতির ঘনবস্তুর তলের পরিসীমা, ক্ষেত্রফল ছাড়াও তাদের আয়তন বা ঘনফল, অর্থাৎ তারা কি পরিমাণ স্থান দখল করে থাকে তা পরিমাপ করার বিষয় আলোচনা করব।

সমকোণী চৌপল বা আয়তঘন (Rectangular Parallelopiped)

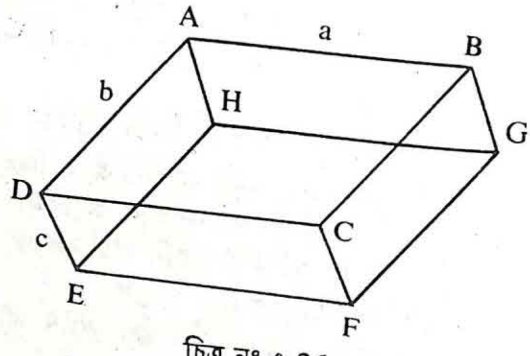
1, 2, 11 ও 19 নং চিত্রের মতো যে-সব ঘনবস্তুর প্রতিটি তল আয়তকার এবং তলগুলির প্রত্যেকটি তার পাশের তলগুলির সঙ্গে সমকোণে নত থাকে, সেইসব ঘনবস্তুকে বলা হয় **সমকোণী চৌপল বা আয়তঘন**।

2 নং চিত্রের বস্তুটি আয়তঘনাকৃতি হলেও তার অন্য আর একটি বৈশিষ্ট্য আছে, তা হল, এর প্রতিটি তল বর্গাকার। একে বলা হয় **ঘনক**। ঘনকের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সমান বলে এদের প্রত্যেকটিকে আমরা ঘনকের বাহু বলতে পারি।

সমকোণী চৌপলের কয়েকটি অংশ ও তার পরিচয়ঃ

পাশের চিত্রের *ABCDEFGH* সমকোণী চৌপলটির 8টি **কৌণিক বিন্দু** আছে।

আর আছে 12টি **প্রান্তরেখা** যেখানে পাশাপাশি দুটি তল মিলিত হয়েছে। এই প্রান্তরেখাগুলির মধ্যে দৈর্ঘ্যের দিকের 4টি যেমন পরস্পর সমান, তেমনি প্রস্থের দিকের 4টি এবং উচ্চতার দিকের 4টিও পরস্পর সমান।



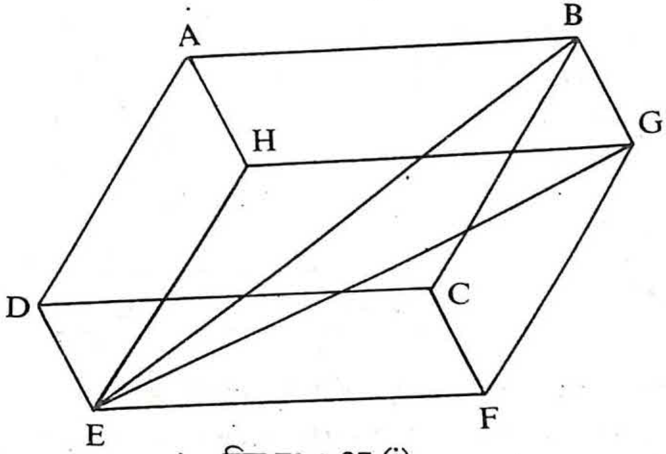
চিত্র নং ঃ 26

আর আছে 6টি আয়তাকার তল। এদের প্রতিটি তার বিপরীত তলের সঙ্গে সমান্তরাল এবং সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট। ঘনকের ক্ষেত্রে অবশ্য প্রতিটি তলের ক্ষেত্রফল সমান।

সমকোণী চৌপলটি যে তলের উপর দাঁড়িয়ে থাকে, তাকে চৌপলের **ভূমি** (base) বলা যেতে পারে। এই প্রসঙ্গে চৌপলের যে প্রান্তরেখাগুলি ভূমির উপর লম্বভাবে দাঁড়িয়ে থাকে তাদের প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্যকে চৌপলের উচ্চতা বলা হয়। সমকোণী চৌপলের যেকোনো একটি কৌণিক বিন্দু থেকে তার বিপরীত **কৌণিক বিন্দু** পর্যন্ত রেখাংশটিকে চৌপলের **কর্ণ** বলা হয়।

একটু চিন্তা করে বলতো, একটি সমকোণী চৌপলের ক'টি কর্ণ টানা যায়।

সমকোণী চৌপলের কর্ণের দৈর্ঘ্য ঃ



চিত্র নং ঃ 27 (i)

উপরের সমকোণী চৌপলটির BE একটি কর্ণ । এবার চৌপলটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যদি যথাক্রমে a একক, b একক ও c একক হয়, তবে BE-এর দৈর্ঘ্য কত হবে তা নির্ণয় করতে হবে ।

EG যুক্ত কর ।

এবার ΔBEG একটি সমকোণী ত্রিভুজ

সুতরাং $BE^2 = EG^2 + BG^2$

আবার তোমরা জান, যেহেতু ΔEFG একটি সমকোণী ত্রিভুজ,

তাই, $EG^2 = EF^2 + FG^2$

সুতরাং, $BE^2 = EG^2 + BG^2$

$= EF^2 + FG^2 + BG^2$

$\therefore\ BE = \sqrt{EF^2 + FG^2 + BG^2}$

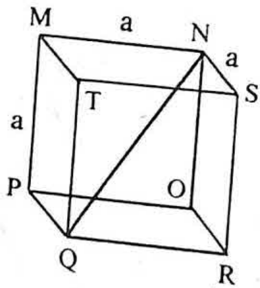
অর্থাৎ $BE = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ একক

কারণ EF, FG ও BG যথাক্রমে চৌপলটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা ।

চৌপলের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{\text{দৈর্ঘ্য}^2 + \text{প্রস্থ}^2 + \text{উচ্চতা}^2}$

পাশের MNOPQRST ঘনকটির NQ একটি কর্ণ। এখন ঘনকটির বাহুর দৈর্ঘ্য যদি a ধরা হয়, তবে উপরের সূত্র অনুযায়ী

$$NQ = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$



চিত্র নং : 27 (ii)

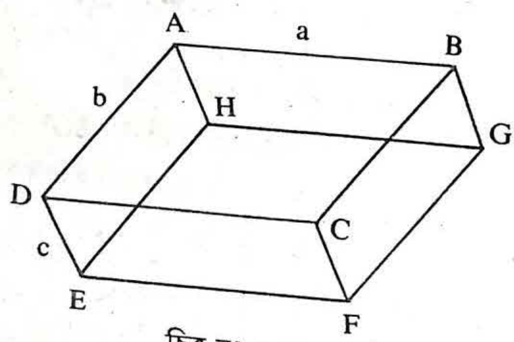
ঘনকের কর্ণের দৈর্ঘ্য = $\sqrt{3}$ × বাহু

বলতো, সমকোণী চৌপলের কর্ণগুলির দৈর্ঘ্য কি সমান।

বিঃ দ্রঃ—মনে রেখ চৌপলের কর্ণগুলিই হল চৌপলের কৌণিক বিন্দুগুলির মধ্যে বৃহত্তম দূরত্ব।

সমকোণী চৌপলের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল :

পাশের চিত্রের সমকোণী চৌপলটির দৈর্ঘ্য = a একক, প্রস্থ = b একক এবং উচ্চতা = c একক। উপর-নিচের তল যথাক্রমে $ABCD$ এবং $EFGH$ এবং এদের



চিত্র নং : 28

ক্ষেত্রফল = 2 × দৈঃ × প্রঃ = $2ab$ বর্গ একক ; দৈর্ঘ্যের দিকের দুটি তল যথাক্রমে $DEFC$ এবং $ABGH$ এবং এদের ক্ষেত্রফল =2 × দৈঃ × উঃ = $2ac$ বর্গ একক ; প্রস্থের দিকের দুটি তল যথাক্রমে $ADEH$ এবং $BCFG$ এবং তাদের ক্ষেত্রফল = 2 × প্রঃ × উঃ = $2ac$ বর্গ একক।

∴ চৌপলটির 6 টি তলের ক্ষেত্রফল = $(2ab + 2ac + 2bc)$ বর্গ একক
= $2(ab + ac + bc)$ বর্গ একক।

চৌপলের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = 2 (দৈঃ × প্রঃ + দৈঃ + উঃ + প্রঃ × উঃ)

ঘনকের ক্ষেত্রে, দৈর্ঘ্য = প্রস্থ = উচ্চতা = বাহু = a (34 নং পৃষ্ঠায় চিত্র দেখ)

সুতরাং ঘনকের 6 টি তলের ক্ষেত্রফল $= (2a^2 + 2a^2 + 2a^2) = 6a^2$

ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = 6 × বাহু²

মন্তব্য ঃ যেহেতু দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা ঋণাত্মক হতে পারে না, তাই বর্গমূল নির্ণয় করার সময় আমরা কেবল ধনাত্মক ফলটি গ্রহণ করব।

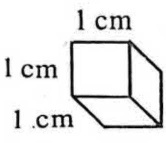
সমকোণী চৌপলের ঘনফল বা আয়তন ঃ

ক্ষেত্রফল পরিমাপের সময় তোমরা দেখেছ প্রথমে কোনো একটি নির্দিষ্ট মানের বর্গাকার অঞ্চলকে একক ধরা হয়েছে ; পরে উদ্দিষ্ট ক্ষেত্রে সেই একক কতবার স্থাপন করা যায় তা দেখে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা হয়েছে। ঘনফল নির্ণয়ের ক্ষেত্রেও সেই উপায় গ্রহণ করা হবে।

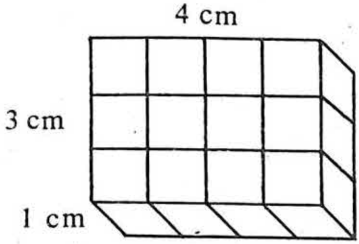
প্রথমে এমন একটি একক ঘনক স্থির করতে হবে, যার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার প্রত্যেকেই এক একক। পরে উদ্দিষ্ট ঘনবস্তুতে সেই একক ঘনকটি কতবার আছে তা নির্ণয় করতে হবে এবং সেই সংখ্যাকে ঘন এককে প্রকাশ করলে উদ্দিষ্ট ঘনবস্তুর আয়তন বা ঘনফল পাওয়া যাবে।

সংশ্লেষণ পদ্ধতিতে একটি সমকোণী চৌপলের আয়তন সম্পর্কে ধারণাটি স্পষ্ট করে নাও ঃ

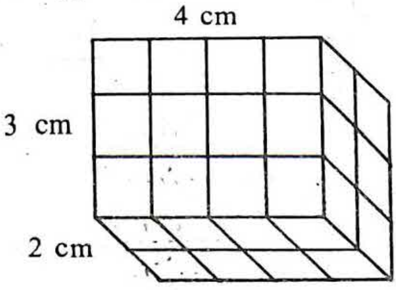
29 (i) নং চিত্রের ঘনকটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার প্রত্যেকটি 1 সেমি। ক্ষেত্রফল পরিমাপের সময় আমরা 1 সেমি লম্বা এবং 1 সেমি চওড়া বর্গক্ষেত্রকে একক ধরেছিলাম এবং তার মান ধরেছিলাম 1 বর্গ সেমি। অনুরূপভাবে এখানে 1 নং চিত্রের ঘনককে একক ধরা হবে এবং তার মানকে বলা হবে 1 ঘন সেমি।



চিত্র নং ঃ 29 (i)



চিত্র নং ঃ 29 (ii)



চিত্র নং ঃ 29 (iii)

প্রথমে আগের পৃষ্ঠার ঘনকটির মতো 24 টি ঘনক নাও।

তা থেকে 12টি ঘনক নিয়ে তাদের 2 নং চিত্রের মতো সাজাও। দেখবে দৈর্ঘ্যের দিকে 4 সেমি, প্রস্থের দিকে 3 সেমি এবং উচ্চতার দিকে 1 সেমি হয়েছে।

এবার, বাকি 12 টি ঘনক নিয়ে 2 নং চিত্রের প্রতিটি ঘনকের উপর এক একটি করে 3 নং চিত্রের মতো সাজাও।

দেখ, 3 নং চিত্রে এমন একটি সমকোণী চৌপল পেলে যার দৈর্ঘ্য 4 সেমি, প্রস্থ 3 সেমি এবং উচ্চতা 2 সেমি। এর আয়তন অবশ্যই 24 টি একক ঘন সেমি-এর সমান।

সুতরাং, এর আয়তন 24 ঘন সেমি।

আবার দেখ,

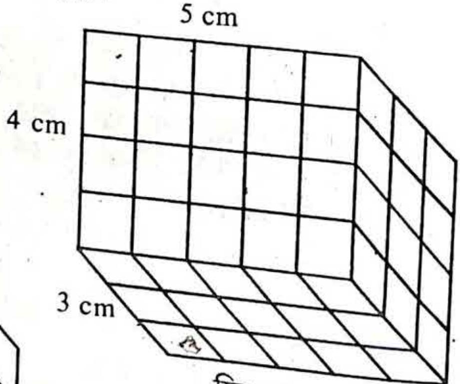
সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা $= 4 \times 3 \times 2 = 24$

সুতরাং আমরা বলতে পারি, সমকোণী চৌপলের

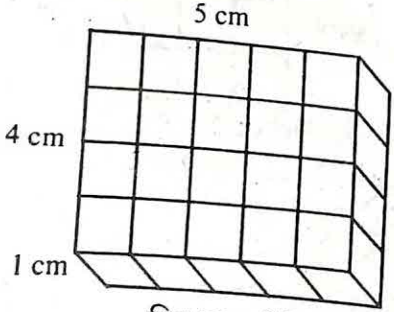
আয়তন বা ঘনফল = (দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা) ঘন একক

= (ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা) ঘন একক

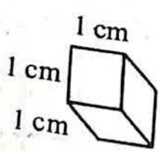
বিষয়টি আরও একভাবে দেখানো যায় :



চিত্র নং : 30 (i)



চিত্র নং : 30 (ii)



চিত্র নং : 30 (iii)

উপরের 30 (i) নং চিত্রটি একটি সমকোণী চৌপলের, চিত্র, যার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 5 সেমি, 4 সেমি ও 3 সেমি।

তোমরা স্লাইস্‌ড্‌ পাউরুটি দেখেছ। সেরূপ এই চৌপলটিকে যদি উচ্চতার দিকে 1 সেমি রেখে এক একটি পাতলা ফালি (স্লাইস্‌) কাটা যায় ; তবে (ii)নং চিত্রের মতো 3 টি পাতলা ফালি পাওয়া যাবে ; যার দৈর্ঘ্য 5 সেমি, প্রস্থ 4 সেমি এবং উচ্চতা 1 সেমি।

এবার প্রতিটি পাতলা ফালিকে যদি আবার দৈর্ঘ্যের দিকে 5 এবং প্রস্থের দিকে 4 ভাগে (ii)নং চিত্রের মতো কাটা যায় তবে 20 টি টুকরো পাওয়া যাবে। প্রতিটি টুকরো হবে এক একটি ঘনক যার দৈর্ঘ্য 1 সেমি, প্রস্থ, এবং উচ্চতাও 1 সেমি (iii) নং চিত্র দ্রষ্টব্য)।

আবার তিনটি ফালি থেকে পাওয়া যাবে মোট (20 × 3) টুকরো = 60 টি টুকরো। তাই বলা যায় চৌপলটির ঘনফল বা আয়তন 60 ঘন সেমি।

আর দেখ, চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার পরিমাণের সঙ্গে 60 সংখ্যাটির সম্পর্ক এই যে, চৌপলের ভূমির ক্ষেত্রফল (5 × 4) বর্গ একক-কে চৌপলের উচ্চতা 3 একক দিয়ে গুণ করে (20 × 3) ঘন একক = 60 ঘন একক পাওয়া যায়।

সুতরাং, বলতে পারি চৌপলের আয়তন
= ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

চৌপলের আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

যেহেতু ঘনকের দৈর্ঘ্য = প্রস্থ = উচ্চতা = বাহু

ঘনকের আয়তন = বাহু^{3}

উদাহরণ 1. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 8 সেমি 5 সেমি ও 3 সেমি হলে, তার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কত ?

তোমরা জান, চৌপলের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল
= (দৈঃ × প্রঃ + দৈঃ × উঃ + প্রঃ × উঃ) বর্গ একক

∴ প্রদত্ত চৌপলটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল
= 2 (8 × 5 + 8 × 3 + 5 × 3) বর্গ সেমি
= 2 × 79 বর্গ সেমি = 158 বর্গ সেমি

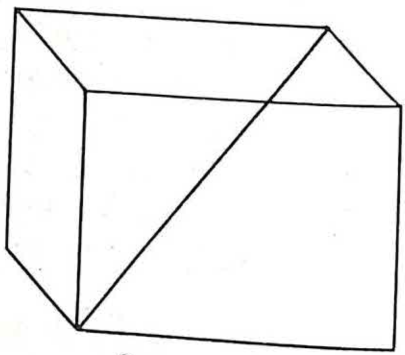
উদাহরণ 2. একটি ঘনকাকৃতি ইস্পাত নির্মিতে জলের ট্যাঙ্কের বাহুর দৈর্ঘ্য 2·2 মিটার। ট্যাঙ্কের বাইরের দিক রং করতে প্রতি বর্গ মিটার 25·50 টাকা হিসাবে কত খরচ পড়বে ?

ঘনকাকৃতি ট্যাঙ্কটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = 6 × 2·2^2 বর্গ মিটার

সুতরাং, প্রতি বর্গ মিটার 25·50 টাকা হিসাবে সমগ্রতল রং করতে খরচ পড়বে (29·04 × 25·50) টাকা = 740·52 টাকা।

উদাহরণ 3. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 5 মিটার, 4 মিটার এবং 3 মিটার। এই ঘরটির মধ্যে কোণাকোণিভাবে সবচেয়ে লম্বা যে বাঁশের টুকরোটি রাখা যাবে তার দৈর্ঘ্য কত হবে ?

তোমরা বুঝতে পারছ, ঘরটি একটি চৌপলের উদাহরণ। আবার তোমরা জান, চৌপলের কর্ণগুলিই হল চৌপলের কৌণিক বিন্দুগুলির মধ্যে বৃহত্তম দূরত্ব। সুতরাং বাঁশের টুকরোর নির্ণেয় দৈর্ঘ্য হবে ঘরটির কর্ণের দৈর্ঘ্যের সমান।



চিত্র নং ঃ 31

কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{\text{দৈঃ}^2 + \text{প্রঃ}^2 + \text{উঃ}^2}$ একক

সুতরাং, ঘরটির কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{5^2 + 4^2 + 3^2}$ মিটার

$= \sqrt{50}$ মিটার $= 5\sqrt{2}$ মিটার

∴ সব চেয়ে লম্বা যে বাঁশের টকরোটি এই ঘরে রাখা যাবে তার দৈর্ঘ্য হবে $5\sqrt{2}$ মিটার।

উদাহরণ 4. 5 মিটার লম্বা এবং 4 মিটার চওড়া একটি চৌবাচ্চাতে 2 মিটার গভীর জল আছে। চৌবাচ্চাটিতে মোট কত ঘন মিটার জল আছে ?

তোমরা জান, চৌবাচ্চায় যে জল আছে তার ঘনফল

= (দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা) ঘন একক

= (5 × 4 × 2) ঘন মিটার

= 40 ঘন মিটার।

সুতরাং, চৌবাচ্চায় 40 ঘন মিটার জল আছে।

উদাহরণ 5. দুটি পেট্রল ট্যাঙ্কারে যথাক্রমে 18750 লিটার ও 11250 লিটার পেট্রল ছিল। ট্যাঙ্কার দুটিতে ফুটো হয়ে যাওয়ায় তাদের

তেল একটি আয়তঘনাকার বড় ট্যাঙ্কে ঢালা হল। বড় ট্যাঙ্কটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যদি যথাক্রমে 4 মিটার ও 3 মিটার হয়, তবে তেলের গভীরতা কত হবে ?

ট্যাঙ্কার দুটিতে মোট তেল আছে (18750 + 11250) লি = 30000 লি। সুতরাং, বড় ট্যাঙ্কটিতে 30000 লিটার তেল থাকবে।

তোমরা জান 1 লিটার তেলের আয়তন 1 ঘন ডেসিমিটার।

$\therefore$ 30000 লিটার তেলের আয়তন হবে 30000 ঘন ডেসিমিটার।

এখন, তেলের নির্ণেয় গভীরতাকে যদি h ডেসিমিটার ধরা হয় তবে,

$$40 \times 30 \times h = 30000$$
$$\therefore h = \frac{30000}{40 \times 30} = 25$$

অর্থাৎ, তেলের গভীরতা হবে 25 ডেসিমিটার = 2·5 মিটার।

উদাহরণ 6. একটি আয়তাকার ধানের জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 18 মিটার ও 11 মিটার। সেই জমিতে পাশের পুকুর থেকে একটি পাম্প দিয়ে জল সেচ করা হচ্ছে। পাম্পটি যদি ঘণ্টায় 39600 লিটার জল সেচ করতে পারে তবে পাম্পটি কতক্ষণ চালালে জমিটিতে 3·5 ডেসিমিটার জল দাঁড়াবে ?

জমিটিতে 3·5 ডেসিমিটার জল দাঁড় করালে তাতে জলের আয়তন হবে (180 × 110 × 3·5) ঘন ডেসিমিটার ; এবং লিটার হিসাবে তার পরিমাণ হবে (180 × 110 × 3·5) লিটার। আবার, যেহেতু পাম্পটি ঘণ্টায় 39600 লিটার জল সেচ করে,

তাই পাম্পটিকে চালাতে হবে $\frac{180 \times 110 \times 3{\cdot}5}{39600}$ ঘণ্টা

= 1 ঘণ্টা 45 মিনিট।

উদাহরণ 7. 4 মি লম্বা, 5 ডেসিমি চওড়া এবং 3 ডেসিমি পুরু একটি কাঠের লগ থেকে 2 মি লম্বা, 2 ডেসিমি চওড়া 40 টি তক্তা চেরাই করা হল। চেরাই-এর ফলে 2% কাঠ নষ্ট হয়েছে। কিন্তু এখন 108 ঘন ডেসিমি কাঠ রয়ে গেছে। প্রতিটি তক্তা কত পুরু করা হয়েছিল ?

প্রথম লগটিতে কাঠ ছিল (40 × 5 × 3) ঘন ডেসিমি = 600 ঘন ডেসিমি।

চেরাই-এর ফলে কাঠ নষ্ট হয়েছে $600 \times \frac{2}{100}$ ঘন ডেসিমি

= 12 ঘন ডেসিমি।

প্রতিটি তক্তা যদি x ডেসিমি পুরু হয়, তবে 40টি তক্তায় কাঠ আছে (20 × 2 × x) × 40 ঘন ডেসিমি = 1600x ঘন ডেসিমি।

আবার তক্তা চেরাই-এর পর কাঠ রয়েছে 108 ঘন ডেসিমি।

সুতরাং প্রশ্নের শর্তানুযায়ী ঃ $1600x = 600 - 12 - 108$

বা, $1600x = 480$

$$\therefore x = \frac{480}{1600} = 0{\cdot}3$$

সুতরাং, প্রতিটি তক্তা 0·3 ডেসিমি = 3 সেমি পুরু করা হয়েছে।

উদাহরণ **8.** 4 সেমি পুরু কাঠের তক্তা দিয়ে তৈরি ঢাকনাসহ একটি বাক্সের ওজন 31 কেজি 920 গ্রাম। কিন্তু বাক্সটি যখন চা ভর্তি থাকে তখন তার ওজন হয় 63 কেজি 168 গ্রাম। বাক্সটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যদি যথাক্রমে 7 ডেসিমি, 5 ডেসিমি এবং 4·8 ডেসিমি হয়, তবে প্রতি ঘন ডেসিমি কাঠ ও চা-এর ওজন কত ?

বাক্সটির আয়তন = (70 × 50 × 48) ঘন সেমি = 168000 ঘন সেমি

বাক্সটির ভিতরে ফাঁকা জায়গার আয়তন

= (70 – 8)(50 – 8)(48 – 8) ঘন সেমি

= 104160 ঘন সেমি

সুতরাং, বাক্সটিতে যতটুকু কাঠ আছে তার আয়তন

= (168000 – 104160) ঘন সেমি = 63840 ঘন সেমি। প্রশ্নের শর্তানুযায়ী, 63840 ঘন সেমি অথবা, 63·84 ঘন ডেসিমি কাঠের ওজন 31·92 কেজি।

$$\therefore 1 \text{ ঘন ডেসিমি কাঠের ওজন} = \frac{31{\cdot}92}{63{\cdot}84} \text{ কেজি}$$

= 0·5 কেজি = 500 গ্রাম।

আবার, যেহেতু খালি বাক্সের ওজন 31·92 কেজি এবং চা ভর্তি বাক্সের ওজন 63·168 কেজি।

সুতরাং, শুধু চা-এর ওজন (63·168 – 31·92) কেজি = 31·248 কেজি।

এখন, 104160 ঘন সেমি অথবা,

104 : 16 ঘন ডেসিমি চা-এর ওজন 31·248 কেজি

$$\therefore 1 \text{ ঘন ডেসিমি চা-এর ওজন } \frac{31{\cdot}248}{104{\cdot}16} \text{ কেজি}$$

= 0·3 কেজি = 300 গ্রাম।

সুতরাং 1 ঘন ডেসিমি কাঠের ওজন 500 গ্রাম এবং 1 ঘন ডেসিমি চা-এর ওজন 300 গ্রাম।

প্রশ্নমালা 4

1. একটি হারমনিয়মের বাক্সের দৈঘ্যে, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 5·8 ডেসিমি, 3·2 ডেসিমি এবং 2·4 ডেসিমি। বাক্সটি বাইরের চারিপাশ পালিশ করতে প্রতি বর্গ ডেসিমি 1·25 টাকা হিসাবে কত খরচ হবে ?

2. একটি ঘরের ভিতরের দিকের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 5 মি, 3·5 মি ও 3 মি। ঘরটির চার দেওয়াল ও ছাদ রং করতে প্রতি বর্গ মিটার 1·50 টাকা হিসাবে এবং প্রতি বর্গ মিটার মেঝে পালিশ করতে 15·50 টাকা হিসাবে মোট খরচ পড়বে ?

3. ঢাকনাসহ একটি ষ্টিল ট্রাঙ্ক এর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 5 ডেসিমি, 3·5 ডেসিমি এবং 2·4 ডেসিমি। ট্রাঙ্কটির ভিতরে ও বাইরে রং করতে প্রতি বর্গ ডেসিমি 0·80 টাকা হিসাবে কত খরচ পড়বে ? (ষ্টিলের পাতের বেধ হিসাবের মধ্যে ধরতে হবে না।)

4. 5 সেমি পুরু কাঠের তক্তা দিয়ে তৈরি ঢাকনাসহ কাঠের বাক্সের বাইরের দিকের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 8 ডেসিমি, 6 ডেসিমি ও 5 ডেসিমি। প্রতি বর্গ ডেসিমি 0·50 টাকা হিসাবে বাক্সটির ভিতর ও বাইরে রং করতে কত খরচ পড়বে ?

5. ঢাকনাসহ একটি আয়তঘনাকার জলের ট্যাঙ্কের দৈর্ঘ্য 4·5 মিটার এবং উচ্চতা 1 মিটার। প্রতি বর্গ মিটার 5·75 টাকা হিসাবে ট্যাঙ্কটির বাইরের চারিপাশ রং করতে 241·50 টাকা খরচ হয়। ট্যাঙ্কটির প্রস্থ কত ?

6. একটি ঘরের চারটি দেওয়াল ও ছাদ প্লাষ্টার করতে প্রতি বর্গ মিটার 7·50 টাকা হিসাবে 671·55 টাকা খরচ পড়ে। ঘরটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার অনুপাত যদি 5 : 4 : 3 হয়, তবে ঘরটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা নির্ণয় কর।

7. একটি আয়তঘনাকার চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও গভীরতা যথাক্রমে 1 মি 7 ডেসিমি, 1 মি 5 ডেসিমি এবং 8 ডেসিমি। চৌবাচ্চাটিতে কত ঘন মিটার জল ধরে ?

8. 35 মিটার দীর্ঘ এবং 25 মিটার প্রশস্ত একটি আয়তঘনাকার পুকুর 4 মিটার গভীর করে কাটতে হলে কত ঘন মিটার মাটি কাটতে হবে ? প্রতি ঘন মিটার 4·25 টাকা হিসাবে পুকুরটি কাটতে কত খরচ পড়বে ?

9. একটি পেট্রল ট্যাঙ্কারে 113960 লিটার পেট্রল আছে। ঐ পেট্রল 3·7 মি দীর্ঘ 2·8 মি প্রশস্ত ও 1 মি গভীর কতগুলি আয়তঘনাকার টবে রাখা যাবে ?

10. একটি শহরে জল সরবরাহ করার জন্য 25 মি দীর্ঘ, 17 মি প্রশস্ত এবং 6 মি গভীর একটি আয়তঘনাকার জলাধার আছে। সকাল বেলা দেখা গেল

জলাধারটির $\frac{8}{15}$ অংশ জলপূর্ণ আছে। দুপুরে দেখা গেল যে, মাত্র $\frac{1}{5}$ অংশে জল রয়েছে। ইতোমধ্যে কত লিটার জল সরবরাহ করা হয়েছে ?

11. একটি চৌবাচ্চায় 10175 লিটার জল আছে। চৌবাচ্চাটির দৈর্ঘ্য 3·7 মি এবং প্রস্থ 2·5 মি। চৌবাচ্চাটির গভীরতা কত ?

(1 ঘন ডেসিমি আয়তনের জল = 1 লিটার জল)

12. গ্রামের মাঠে জলসেচের সুযোগ বাড়ানোর জন্য পঞ্চায়েৎ থেকে 2 মিটার চওড়া এবং 8 ডেসিমি গভীর একটি খাল কাটা হয়েছে। হিসাব করে দেখা গেল মোট 240 ঘন মিটার মাটি কাটা হয়েছে। খালটি কত লম্বা ?

13. একটি চা-এর বাক্সের ভিতরের দিকের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 7·5 ডেসিমি, 6 ডেসিমি এবং 5·4 ডেসিমি। বাক্সটি যখন চা ভর্তি থাকে তখন তার ওজন হয় 52 কেজি 350 গ্রাম, কিন্তু খালি অবস্থায় বাক্সটির ওজন 3·75 কেজি। এক ঘন ডেসিমি চা-এর ওজন কত ?

14. একটি ইঁটের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 25 সেমি, 12·5 সেমি ও 8 সেমি। এরূপ 5500 ইঁট সাজিয়ে রাখতে কত ঘন মিটার জায়গা প্রয়োজন ? (ধরে নিতে হবে যে দুটি ইঁটের মাঝে কোন জায়গা ফাঁকা থাকে না।)

15. একটি কেরোসিনের টিনের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 24 সেমি, 24 সেমি ও 35 সেমি। 3·15 মিটার দীর্ঘ, 1·2 মিটার প্রশস্ত এবং 0·72 মিটার গভীর আয়তঘনাকার ট্যাঙ্কে যে কেরোসিন আছে তা দিয়ে ঐরূপ কতগুলি টিন ভর্তি করা যাবে ?

16. তোমাদের গ্রাম থেকে সদর রাস্তায় যাওয়ার রাস্তাটির দুপাশের জমি থেকে সমান গভীর 30 টি আয়তঘনাকার গর্ত করে সেই মাটি দিয়ে রাস্তা টি উঁচু করা হয়েছে। যদি প্রতিটি গর্তের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 14 মি এবং 8 মি হয় এবং রাস্তাটি তৈরি করতে যদি মোট 2520 ঘন মিটার মাটি লেগে থাকে, তবে প্রতিটি গর্তের গভীরতা কত ?

17. ঘনকাকৃতি একটি জলপূর্ণ চৌবাচ্চা থেকে সমান মাপের 64 বালতি জল তুলে নিলে চৌবাচ্চাটির $\frac{1}{3}$ অংশ জলপূর্ণ থাকে। চৌবাচ্চার বাহুর দৈর্ঘ্য যদি 1·2 মিটার হয়, তবে প্রতিটি বালতিতে কত লিটার জল ধরে ?

18. আয়তঘনাকার একটি পেট্রোল ট্যাঙ্কে যে পেট্রোল আছে তা দিয়ে 5 লিটার পেট্রোল ধরে এমন 528 টি টিন ভর্তি করা যায়। ট্যাঙ্কটির গভীরতা 7·5 ডেসিমি এবং প্রস্থ দৈর্ঘ্যের $\frac{8}{11}$ অংশ। ট্যাঙ্কটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

19. এক গ্রোস দেশলাই বাক্সের একটি প্যাকেটের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 2·8 ডেসিমি, 1·5 ডেসিমি ও 0·9 ডেসিমি হলে, একটি দেশলাই বাক্সের আয়তন কত ? যদি একটি দেশলাই বাক্সের দৈর্ঘ্য 5 সেমি এবং প্রস্থ 3·5 সেমি হয়, তবে তার উচ্চতা কত ? (এক গ্রোস = 12 ডজন)

20. 25 ঘন মিটার জায়গায় কিছু ইঁট সাজানো আছে। প্রতিটি ইঁটের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 25 সেমি, 25 সেমি ও 8 সেমি হলে পাঁজাটিতে কত ইঁট আছে ? (মনে কর, দুটি ইঁটের মাঝে কোনো ফাঁকা জায়গা নেই।)

21. 2·1 মি দীর্ঘ, 1·5 মি প্রশস্ত একটি আয়তঘনাকার চৌবাচ্চার অর্ধেক জলপূর্ণ আছে। ঐ চৌবাচ্চায় যদি আরও 630 লিটার জল ঢালা হয়, তবে জলের গভীরতা কতটুকু বৃদ্ধি পাবে ?

22. নারকেল তেলের ড্রামে যথাক্রমে 800 লিটার, 725 লিটার এবং 575 লিটার তেল ছিল। এই তিনটি ড্রামের তেল একটি আয়তঘনাকার টবে ঢালা হল। এতে টবে তেলের গভীরতা হল 7 ডেসিমি। টবটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত যদি 4 : 3 হয়, তবে টবটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত ? টবটির গভীরতা যদি 5 ডেসিমি হতো, তবে ওতে 1620 লিটার তেল ধরে এমন একটি ড্রামের সব তেল ঢালা যেতো কি ? তোমার উত্তরের সমর্থনের যুক্তি দাও।

23. একটি তিনতলা বাড়ির তিনটি ভাড়াটিয়া পরিবারের দৈনিক জলের চাহিদা যথাক্রমে 1200 লিটার, 1050 লিটার এবং 950 লিটার। এই চাহিদা মিটানোর পরও 25% জল মজুদ থাকে এমন একটি ট্যাঙ্ক বসানোর জন্য মাত্র 2·5 মি দীর্ঘ এবং 1·6 মি চওড়া একটি জায়গা পাওয়া গেছে। ট্যাঙ্কটি কত মিটার গভীর করতে হবে ? জায়গাটি যদি প্রস্থের দিকে আরও 4 ডেসিমি বেশি হতো ও তবে ট্যাঙ্কটি কত গভীর করলেই চলত ?

24. ইঁট ভিজানোর জন্য 3 মি দীর্ঘ, 2·5 মি চওড়া এবং 1·8 মি গভীর একটি চৌবাচ্চা তৈরি করা হয়েছে। চৌবাচ্চাটিতে যখন 8 ডেসিমি গভীর জল ছিল, তখন তাতে কিছু ইঁট ভিজানো হল। ইঁটগুলি $\frac{1}{5}$ অংশ জল শুষে লওয়ার পরও দেখা গেল জলতল 5·2 ডেসিমি উঠে এসেছে। প্রতিটি ইঁটের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যদি যথাক্রমে 25 সেমি, 12·5 সেমি ও 8 সেমি হয়, তবে কত ইঁট ভিজানো হয়েছে ?

25. কোলকাতার কোনো একটি বস্তিতে বিশুদ্ধ জল সরবরাহের জন্য করপোরেশন একটি সংরক্ষিত জলের ট্যাঙ্ক তৈরি করেছে। ট্যাঙ্কটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও গভীরতা যথাক্রমে 4·3 মি, 3·2 মি এবং 1·5 মি। প্রতিদিন সকালবেলা লড়িতে করে সমান আয়তনের তিনটি জলাধারের জল দিয়ে ট্যাঙ্কটি ভর্তি করে দিয়ে যায়। প্রতিটি জলাধারে কত লিটার জল ধরে ?

26. 48 মি লম্বা এবং 31·5 মি চওড়া একখণ্ড নিচু জমিকে 6·5 ডেসিমি উঁচু করার জন্য পাশে 27 মি লম্বা এবং 18·2 মি চওড়া একটি জমি গর্ত করে মাটি তোলা হল। গর্তটি কত মিটার গভীর হবে ?

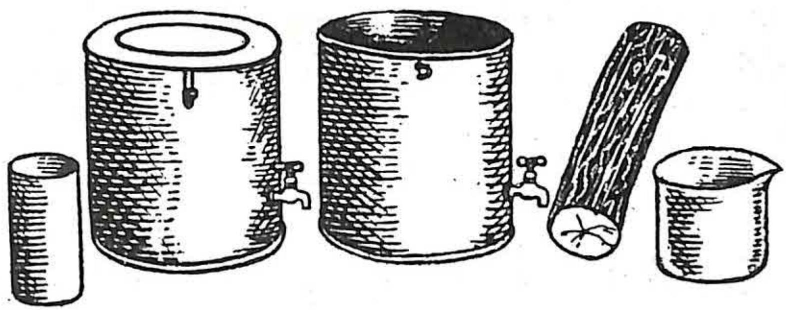
27. 5 সেমি পুরু কাঠের তক্তায় তৈরি ঢাকনাসহ একটি কাঠের বাক্সের ওজন 115·5 কেজি। কিন্তু বাক্সটি যখন চাল ভর্তি থাকে, তখন তার ওজন হয় 880·5 কেজি। বাক্সটির ভিতরের দিকের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 12 ডেসিমি এবং 8·5 ডেসিমি এবং এক ঘন ডেসিমি চালের ওজন 1·5 কেজি। তবে বাক্সটির ভিতরের উচ্চতা কত ? প্রতি বর্গ ডেসিমি 0·50 টাকা হিসাবে বাক্সটির বাইরের চারিপাশ রং করতে কত খরচ পড়বে ?

28. 20 মি দীর্ঘ এবং 18·5 মি চওড়া একটি আয়তঘনাকার পুকুরে 3·2 মি গভীর জল আছে। ঘন্টায় 160 কিলোলিটার জল সেচ করতে পারে এমন একটি পাম্প দিয়ে কতক্ষণে পুকুরটির সমস্ত জল সেচ করা যাবে ? ঐ জল যদি 59·2 মি দীর্ঘ এবং 40 মি চওড়া একটি জল আটকানো ধান ক্ষেতে ফেলা হয়, তবে সেই জমিতে জলের গভীরতা কত বৃদ্ধি পাবে ?

চতুর্থ অধ্যায়

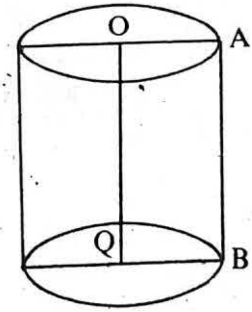
লম্ব-বৃত্তাকার চোঙ (Right Circular Cylinder)

তোমরা 30 নং পৃষ্ঠার 3, 4, 12 ও 17 নং চিত্রগুলি দেখেছ। অনুরূপ আকৃতির আরও কয়েকটি ঘনবস্তু দেখ।



চিত্র নং : 32

দেখতে পাচ্ছ, জিনিসগুলির কোনোটি ছোট, আবার কোনোটি বড়। কিন্তু সবগুলির আকৃতিই একপ্রকার। এরূপ আকৃতির ঘনবস্তুকে লম্ব-বৃত্তাকার চোঙের উদাহরণ বলা যায়।



চিত্র নং : 33

পাশে লম্ব-বৃত্তাকার চোঙের একটি রেখাচিত্র দেওয়া হল। তাতে এরূপ আকৃতির ঘনবস্তুগুলির বিশেষত্ব লক্ষ কর।

প্রথমেই দেখ একটি লম্ব-বৃত্তাকার চোঙ 3টি তল দ্বারা তৈরি। তার মধ্যে উপর ও নিচের তল দুটি বৃত্তাকার এবং সর্বসম। এদের মধ্যে যে তলটির উপর চোঙটি দাঁড়িয়ে থাকে তাকে চোঙের ভূমি বলা যায়।

আর তৃতীয় তলটি একটি বক্রতল যা চোঙটির চার পাশ ঘিরে আছে। আরও লক্ষ কর এই বক্রতলটি ভূমিতলের পরিধি বরাবর ভূমিতলের সঙ্গে লম্বভাবে দণ্ডায়মান। একে চোঙের পার্শ্বতল বলা যায়।

এবার বৃত্তাকার তলদুটির কেন্দ্রবিন্দু যদি যথাক্রমে O এবং Q হয়, তবে OQ সরলরেখাটিকে বলা যায় চোঙের অক্ষরেখা। এই অক্ষরেখার সঙ্গে পার্শ্বতলটির সম্পর্ক এই যে পার্শ্বতলটির প্রতিটি বিন্দু এই অক্ষরেখা থেকে সমদূরবর্তী।

OQ রেখাংশের দৈর্ঘ্যকে অর্থাৎ বৃত্তাকার তলদুটির দূরত্বকে চোঙের উচ্চতা বলা হয়। এখানে OQ = উচ্চতা।

আবার পার্শ্বতলের উপর যদি OQ অক্ষের সমান্তরাল করে AB রেখাংশ লওয়া হয়, তবে দেখা যাবে যে OQ অক্ষ থেকে সমদূরত্ব বজায় রেখে AB-এর আবর্তনের ফলেই লম্ব-বৃত্তাকার চোঙটি তৈরি হয়েছে। তাই AB রেখাংশকে চোঙের উৎপাদক রেখা (generating line) বলা হয়।

লম্ব-বৃত্তাকার চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ঃ

মনে কর, উপরের চোঙের বৃত্তাকার তলদুটির ব্যাসার্ধ $OA = QB = r$ এবং উচ্চতা $OQ = AB = h$.

তবে বৃত্তাকার তলদুটির প্রত্যেকটির ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গ একক। এবার বক্রাকার পার্শ্বতলটিকে যদি উৎপাদক রেখা AB বরাবর কেটে ছড়িয়ে দেওয়া যায়, তবে যে আয়তাকার তল পাওয়া যাবে তার দৈর্ঘ্য হবে বৃত্তাকার তলের পরিধির সমান, অর্থাৎ '$2\pi r$' এবং প্রস্থ হবে চোঙের উচ্চতার সমান, অর্থাৎ 'h'.

সুতরাং,

পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh$ বর্গ একক ;

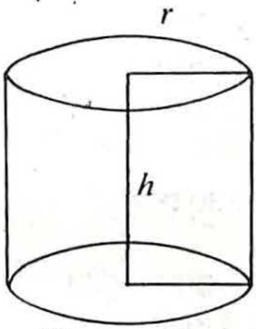
$\therefore$ চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= (2 \times \pi r^2 + 2\pi rh)$ বর্গ একক

$= 2\pi r(r + h)$ বর্গ একক

অর্থাৎ $= 2\pi \times$ ব্যাসার্ধ (ব্যাসার্ধ + উচ্চতা)

চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi \times$ ব্যাসার্ধ (ব্যাসার্ধ + উচ্চতা) $= 2\pi r(r + h)$

লম্ব-বৃত্তাকার চোঙের আয়তন বা ঘনফলঃ



চিত্র নং ঃ 34

লম্ব-বৃত্তাকার চোঙের আয়তন বা ঘনফল = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

$= \pi r^2 \times h$ ঘন একক

$= \pi r^2 h$ ঘন একক

চোঙের আয়তন বা ঘনফল = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা $= \pi r^2 h$

উদাহরণ 1. লোহার পাত দিয়ে 6 ডেসিমি উঁচু এবং 3·5 ডেসিমি ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট দুই মুখ বন্ধ একটি লম্ব-বৃত্তাকার ড্রাম তৈরি করতে কত পাত লাগবে ?

ড্রামটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল,

$= 2\pi \times$ (ব্যাসার্ধ + উচ্চতা)

$= \{2\pi \times 3{\cdot}5\,(3{\cdot}5 + 6)\}$ বর্গ ডেসিমি

$= \{2 \times \frac{22}{7} \times 3{\cdot}5 \times 9{\cdot}5\}$ বর্গ ডেসিমি $= 209$ বর্গ ডেসিমি

সুতরাং, ড্রামটি তৈরি করতে 209 বর্গ ডেসিমি লোহার পাত লাগবে।

উদাহরণ 2. 5·25 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি গোল টিনের কৌটোর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল 396 বর্গ সেমি। কৌটোটির উচ্চতা কত ?

মনে করি, কৌটোটির উচ্চতা h সেমি

আমরা জানি, পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল = ভূমির পরিধি × উচ্চতা

$= (2\pi \times 5{\cdot}25 \times h)$ বর্গ সেমি

$= 33h$ বর্গ সেমি

$\therefore$ প্রশ্নের শর্তানুযায়ী $33h = 396$

$\therefore h = \frac{396}{33} = 12$

$\because$ কৌটোটির উচ্চতা 12 সেমি।

উদাহরণ 3. একটি এক মুখ খোলা লম্ব-বৃত্তাকার পাত্রের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 1474 বর্গ সেমি। পাত্রটির ভূমির ব্যাস যদি 14 সেমি হয় তবে পাত্রটির উচ্চতা কত ?

মনে করি, পাত্রটির উচ্চতা h সেমি

তবে প্রশ্নের শর্তানুযায়ী, $\pi.7^2 + 2\pi.7.h = 1474$

বা, $154 + 44h = 1474$

বা, $44h = 1474 - 154$

$\therefore h = \frac{1320}{44} = 30$

$\therefore$ পাত্রটির উচ্চতা 30 সেমি ।

উদাহরণ 4. 35 সেমি উচ্চতাবিশিষ্ট একটি ড্রামের ভূমির ব্যাস যদি 24 সেমি হয়, তবে ঐ ড্রামে কত ঘন সেমি জল ধরবে ?

তোমরা জান, ড্রামের আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

$= (\pi \times 12^2 \times 35)$ ঘন সেমি

$\therefore$ ড্রামে জলের পরিমাণ

$= (\frac{22}{7} \times 12 \times 12 \times 35)$ ঘন সেমি

$= 15840$ ঘন সেমি

সুতরাং, ড্রামটিতে 15840 ঘন সেমি জল ধরবে ।

উদাহরণ 5. 1·2 মি ব্যাসবিশিষ্ট 8·4 মি লম্বা একটি পেট্রল ট্যাঙ্কারে যে পেট্রল ধরে তা দিয়ে 4 ডেসিমি লম্বা, 2 ডেসিমি চওড়া এবং 3 ডেসিমি উঁচু কতগুলি টিন ভর্তি করা যাবে ?

প্রশ্নের শর্তানুযায়ী সমস্যাটি হল

$(\pi \times 0{\cdot}6^2 \times 8{\cdot}4) \div ({\cdot}4 \times {\cdot}2 \times {\cdot}3) = ?$

সুতরাং নির্ণেয় টিনের সংখ্যা $= \frac{22}{7} \times \frac{{\cdot}6 \times {\cdot}6 \times 8{\cdot}4}{{\cdot}4 \times {\cdot}2 \times {\cdot}3} = 396$

$\therefore$ সেই ট্যাঙ্কারের পেট্রল দিয়ে 396 টি টিন ভর্তি করা যাবে ।

উদাহরণ 6. 14 সেমি ব্যাসের পাইপবিশিষ্ট একটি পাম্পসেট মিনিটে 2500 লিটার জল সেচ করতে পারে । পাম্পটি এক ঘণ্টায় কত লিটার জল সেচ করবে ? (1 লিটার = 1 ঘন ডেসিমি)

পাইপটির মুখের ক্ষেত্রফল $= \frac{22}{7} \times 7^2$ বর্গ সেমি

$= 154$ বর্গ সেমি

$= 1{\cdot}54$ বর্গ ডেসিমি

এক মিনিটে যত জল সেচ করে

$$\text{তার আয়তন} = (1{\cdot}54 \times 2500) \text{ ঘন ডেসিমি}$$
$$= 3850 \text{ ঘন ডেসিমি}$$

$\therefore$ 1 ঘন্টা বা 60 মিনিটে যত জল সেচ করে

$$\text{তার আয়তন} = (3850 \times 60) \text{ ঘন ডেসিমি}$$
$$= 231000 \text{ ঘন ডেসিমি}$$

যেহেতু 1 ঘন ডেসিমি জলের পরিমাপ 1 লিটার

সুতরাং, পাম্পসেটটি ঘণ্টায় 231000 লিটার = 231 কিলোলিটার জল সেচ করবে।

উদাহরণ 7. 5·6 সেমি ব্যাস বিশিষ্ট একটি পাইপ দিয়ে মিনিটে 200 মিটার জল ঢাললে কতক্ষণে 2·8 মি দীর্ঘ, 2·2 মি প্রশস্ত এবং 1·6 মি গভীর একটি চৌবাচ্চার $\frac{5}{8}$ অংশ জলপূর্ণ হবে ?

$$\text{চৌবাচ্চাটির আয়তন} = (28 \times 22 \times 16) \text{ ঘন ডেসিমি}$$
$$= 9856 \text{ ঘন ডেসিমি}$$

$$\therefore \text{চৌবাচ্চাটির } \frac{5}{8} \text{ অংশের আয়তন} = 9856 \times \frac{5}{8} \text{ ঘন ডেসিমি}$$
$$= 6160 \text{ ঘন ডেসিমি}$$

$$\text{পাইপটি এক মিনিট জল যোগান দেয়} = (\pi \times 2{\cdot}8^2 \times 20000) \text{ ঘন সেমি}$$
$$= (\frac{22}{7} \times 2{\cdot}8 \times 2{\cdot}8 \times 20000) \text{ ঘন সেমি}$$
$$= 492800 \text{ ঘন সেমি}$$
$$= 492{\cdot}8 \text{ ঘন ডেসিমি}$$

সুতরাং, চৌবাচ্চাটির $\frac{5}{8}$ অংশ পূর্ণ করার জন্য প্রয়োজনীয় সময়

$$= (6160 \div 492{\cdot}8) \text{ মিনিট}$$
$$= 12{\cdot}5 \text{ মিনিট}$$

অর্থাৎ, 12 মিনিট 30 সেকেণ্ড সময় লাগবে।

উদাহরণ 8. তিলকপুর গ্রামে আগুন লাগার খবর পেয়ে একটি জলভরা লম্ব-বৃত্তাকার ট্যাঙ্কার নিয়ে ফায়ার ব্রিগেডের একটি দল এল। ট্যাঙ্কারটির ব্যাস 2·8 মিটার এবং দৈর্ঘ্য 6 মিটার। যদি 2 সেমি ব্যাসের তিনটি হোস্ পাইপ দিয়ে মিনিটে 420 মিটার বেগে জল ঢেলে 40 মিনিটে আগুন নেভানো হয়ে থাকে, তবে আগুন নেভাতে কত জল খরচ হয়েছে এবং ট্যাঙ্কারে আর কত জল রয়েছে ?

ট্যাঙ্কারে জলের পরিমাণ $= (\pi \times 1{\cdot}4^2 \times 6)$ ঘন মি

$= 36{\cdot}96$ ঘন মি

$= 36960$ ঘন ডেসিমি

প্রতিটি পাইপ এক মিনিটে যে জল ঢালে তার পরিমাণ

$= (\pi \times 1^2 \times 42000)$ ঘন সেমি

$= 132000$ ঘন সেমি

$= 132$ ঘন ডেসিমি

$\therefore$ 3 টি পাইপ 40 মিনিটে

জল ঢালে $= (132 \times 3 \times 40)$ ঘন ডেসিমি

$= 15840$ ঘন ডেসিমি

সুতরাং, আগুন নেভাতে 15840 ঘন ডেসিমি জল খরচ হয়েছে, এবং ট্যাঙ্কারে আরও জল রয়ে গেছে $(36960 - 15840)$ ঘন ডেসিমি

$= 21120$ ঘন ডেসিমি

উদাহরণ **9.** একটি ছিদ্র দিয়ে জাহাজের খোলে 110 কিলোলিটার জল ঢুকেছে। ছিদ্রটি বন্ধ করার পর জল নিকাশের জন্য একটি পাম্প লাগানো হয়েছে। পাম্পটির পাইপের ব্যাস 10 সেমি এবং চালু অবস্থায় জলের গতিবেগ মিনিটে 350 মি। সমস্ত জল নিকাশ করতে পাম্পটি কতক্ষণ চালু রাখতে হবে ?

এক মিনিটে পাম্পটি জল নিকাশ করতে পারে

$= \left(\frac{22}{7} \times \frac{5 \times 5}{100} \times 3500\right)$ ঘন ডেসিমি

$= 2750$ ঘন ডেসিমি

অর্থাৎ, এক মিনিটে পাম্পটি 2750 লিটার জল নিকাশ করতে পারে।

$\therefore$ 110 কিলোলিটার জল নিকাশ করতে সময় লাগবে $\frac{110000}{2750}$ মিনিট $= 40$ মিনিট।

$\therefore$ 40 মিনিটে পাম্পটি সমস্ত জল নিকাশ করতে পারবে।

উদাহরণ **10.** 6 মিটার লম্বা লম্ব-বৃত্তাকার চোঙাকৃতি লোহার ফাঁপা পাইপের ভিতরের ও বাইরের ব্যাস যথাক্রমে $3{\cdot}5$ সেমি এবং $4{\cdot}2$ সেমি। পাইপটিতে কত লোহা আছে ? 1 ঘন ডেসিমি লোহার ওজন যদি 5 কেজি হয়, তবে পাইপটির ওজন কত ?

পাইপটির বাইরের ব্যাসার্ধ $= 4{\cdot}2$ সেমি $\div 2 = 2{\cdot}1$ সেমি $= {\cdot}21$ ডেসিমি

এবং পাইপটির ভিতরের ব্যাসার্ধ $= 3{\cdot}5$ সেমি $\div 2 = {\cdot}175$ ডেসিমি

সুতরাং পাইপটির প্রস্থচ্ছেদে যতটুকু অংশে লোহা আছে,

তার ক্ষেত্রফল = $\pi(\cdot21^2 - \cdot175^2)$ বর্গ ডেসিমি

$= (\frac{22}{7} \times 0\cdot013475)$ বর্গ ডেসিমি

∴ পাইপটিতে লোহা আছে $\frac{22}{7} \times 0\cdot013475 \times 60$ ঘন ডেসিমি

$= 2\cdot541$ ঘন ডেসিমি

এবং পাইপটির ওজন হবে $2\cdot541 \times 5$ কেজি

$= 12\cdot705$ কেজি = 12 কেজি 705 গ্রা

প্রশ্নমালা 5

1. ঢাকনাসহ একটি লম্ব-বৃত্তাকার জলের ড্রামের ব্যাস 6·3 ডেসিমি এবং উচ্চতা 9·1 ডেসিমি। প্রতি বর্গ ডেসিমি 0·60 টাকা হিসাবে ড্রামটির বাইরের চারিপাশে রং করতে কত খরচ হবে ?

2. একটি ঘরের বারান্দায় 4·2 ডেসিমি ব্যাসের তিনটি লম্ব-বৃত্তকার থাম আছে। প্রতিটি থামের উচ্চতা 3·4 মিটার। প্রতি বর্গ মিটার 15 টাকা হিসাবে থামগুলি প্লাষ্টার করতে কত খরচ হবে ?

3. একটি কারখানার লম্ব-বৃত্তাকার চিমনির দৈর্ঘ্য 21 মিটার। তার খোলা মুখটির বহির্ব্যাস 5·6 ডেসিমি। প্রতি বর্গ ডেসিমি 0·15 টাকা হিসাবে চিমনির বাইরের দিক রং করতে কত খরচ পড়বে ?

4. লোহার পাতলা চাদর দিয়ে এক মুখ খোলা একটি লম্ব-বৃত্তাকার ড্রাম তৈরি করতে 93·06 বর্গ ডেসিমি চাদর লেগেছে। ড্রামটির ব্যাস যদি 4·2 ডেসিমি হয়, তবে তার উচ্চতা কত ?

5. 56·32 বর্গ মিটার লোহার পাত দিয়ে 28 মিটার লম্বা একটি লম্ব-বৃত্তাকার চিমনি তৈরি করলে, তার খোলা মুখের ব্যাস কত হবে ?

6. দুই মুখ খোলা একটি লম্ব-বৃত্তাকার লোহার পাইপের মুখের বহির্ব্যাস 8 সেমি এবং তার দৈর্ঘ্য 14·7 মিটার। ঐ পাইপের বাইরের চারপাশ এনামেল রং করতে প্রতি বর্গ ডেসিমি 0·75 টাকা হিসাবে কত খরচ পড়বে ?

7. একটি বিকারের (ল্যাবরেটরিতে ব্যবহার্য কাঁচের লম্ব-বৃত্তাকার গ্লাস) ব্যাস 10·5 সেমি এবং উচ্চতা 16 সেমি। ওই বিকারে কত ঘন সেমি এসিড ধরবে ?

8. সরষের তেল রাখার এক একটি লম্ব-বৃত্তাকার ড্রামের ব্যাস 8·4 ডেসিমি এবং উচ্চতা 1·2 মি। এরূপ 5টি ড্রামে কত ঘন ডেসিমি তেল ধরবে ?

9. মাদার ডেয়ারীর একটি দুধের ট্যাঙ্কের ব্যাস 1·75 মি এবং দৈর্ঘ্য 6 মি। ওই ট্যাঙ্কে কত লিটার দুধ ধরবে ? (1 লিটার = 1 ঘন ডেসিমি)

10. 2·1 মি ব্যাসবিশিষ্ট 8 মি গভীর একটি ইঁদারা খনন করতে কত ঘন মিটার মাটি কাটতে হবে ?

11. 5·6 ডেসিমি ব্যাসের 2·5 মি লম্বা দুটি লম্ব-বৃত্তাকার পিলার ঢালাই করতে কত ঘন ডেসিমি ঢালাই মশলা লাগবে ? যদি 4 : 2 : 1 অনুপাতে স্টোন-চিপস্, বালি ও সিমেন্ট মিশিয়ে ঢালাই মশলা তৈরি হয়, তবে কোন উপাদান কতটুকু লাগবে ?

12. একটি গ্যাস জারের (ল্যাবরেটরিতে গ্যাস রাখার জন্য লম্ব-বৃত্তাকার পাত্র) ব্যাস 8 সেমি এবং উচ্চতা 24·5 সেমি । ওই গ্যাস জারে কত ঘন সেমি এসিড ধরবে ?

13. বস্তিতে বস্তিতে জল সরবরাহ করার জন্য কর্পোরেশনের যে জলের ট্যাঙ্ক আছে, তার ব্যাস 1·4 মি এবং দৈর্ঘ্য 7·2 মি । ওই ট্যাঙ্কের জল দিয়ে 8·4 ডেসিমি ব্যাস ও 1·25 মি উঁচু কতগুলি ড্রাম ভর্তি করা যাবে ?

14. সমান ঘনত্বের একটি লম্ব-বৃত্তাকার কাঠের গুড়ির ব্যাস 5·6 ডেসিমি এবং তার দৈর্ঘ্য 2·5 মি । গুড়িটির ওজন 9·24 কুইন্টাল হলে, এক ঘন ডেসিমি কাঠের ওজন কত ?

15. 2·8 ডেসিমি ব্যাসবিশিষ্ট এবং 7·5 ডেসিমি লম্বা একটি জ্বালানী-গ্যাস সিলিণ্ডারে 15 কেজি 15 গ্রাম গ্যাস থাকলে, প্রতি ঘন ডেসিমি গ্যাসের ওজন কত ?

16. 1·8 মি ব্যাসবিশিষ্ট একটি কূপে জলের গভীরতা 5·25 মি । ওই কূপে কত লিটার জল আছে ? (1 লিটার = 1 ঘন ডেসিমি)

17. 2·1 মি ব্যাস ও 20 মি দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি পেট্রল ট্যাঙ্কের তেল থেকে 1·4 মি ব্যাস ও 1·6 মি উচ্চতাবিশিষ্ট 25টি ড্রাম ভর্তি করার পর ওই ট্যাঙ্কে কত তেল অবশিষ্ট থাকবে ?

18. সমান ব্যাসের দুটি বিকারে যথাক্রমে 8 সেমি এবং 10 সেমি উচ্চতার লঘু এসিড আছে । ওই এসিড 10·5 সেমি ব্যাসের একটি বড় বিকারে ঢাললে এসিডের উচ্চতা 8 সেমি হয় । প্রথম বিকার দুটির ব্যাস কত ছিল ?

19. একটি কেরোসিন তেলের ট্যাঙ্কারের ব্যাস 1·4 মি এবং দৈর্ঘ্য 5 মি । তেল ভর্তি ওই ট্যাঙ্কারের তেল থেকে 250 টিন তেল ভর্তি করা হল । প্রতিটি টিনের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 24 সেমি, 24 সেমি ও 35 সেমি হলে, ট্যাঙ্কারে কত লিটার তেল অবশিষ্ট থাকবে ? (1 ঘন ডেসিমি = 1 লিটার)

20. 14·7 মি দীর্ঘ, 11 মি প্রশস্ত এবং 9 ডেসিমি গভীর একটি চৌবাচ্চায় 4·2 সেমি ব্যাসের একটি পাইপ দিয়ে মিনিটে 250 মিটার বেগে জল ঢোকালে কতক্ষণে খালি চৌবাচ্চা জলপূর্ণ হবে ?

21. 7 সেমি ব্যাসের একটি লম্বা গ্যাস জারে কিছু জল আছে । ওই জলে যদি 5·6 সেমি ব্যাসের 5 সেমি লম্বা একটি নিরেট লোহার লম্ব-বৃত্তাকার টুকরো সম্পূর্ণ ডোবানো যায়, তবে জলতলে কতটুকু উপরে উঠবে ?

22. সমান ব্যাস ও সমান উচ্চতাবিশিষ্ট তিনটি জারের প্রথমটির $\frac{2}{3}$ অংশ, দ্বিতীয়টির $\frac{5}{6}$ অংশ এবং তৃতীয়টির $\frac{7}{9}$ অংশ লঘু সালফিউরিক এসিডে পূর্ণ ছিল । ওই তিনটি জারের এসিড যদি 2·1 ডেসিমি ব্যাসের একটি জারে রাখা হয়, তবে জারে এসিডের উচ্চতা হয় 4·1 ডেসিমি । প্রথম তিনটি জারের ব্যাস যদি 1·4 ডেসিমি হয়, তবে তাদের উচ্চতা কত ছিল ?

23. 2 মি ব্যাসবিশিষ্ট একটি বাঁধানো কূপে 5·6 মি গভীর জল আছে। ওই কূপ থেকে জল তুলে 4 মি দীর্ঘ, 3 মি প্রশস্ত এবং 1·1 মি গভীর একটি ট্যাঙ্ক ভর্তি করা হল। জল তোলার পর কূপে জলের গভীরতা কত থাকবে ? (ধরে নেওয়া হল যে, ওই সময়ে কূপে কোনো জল প্রবেশ করেনি।)

24. 4 মিটার ব্যাসের 56 মিটার লম্বা একটি লম্ব-বৃত্তাকার টানেল কাটতে গিয়ে যে পাথর ও মাটি বের হল তা দিয়ে 48 মিটার দীর্ঘ, 16·5 মিটার প্রশস্ত ও 4 মিটার গভীর একটি খাদের কত অংশ ভরাট করা যাবে ?

25. 13 মি দীর্ঘ, 11 মি প্রশস্ত একটি ছাদের জল বের হওয়ার নলটি বৃষ্টির সময় বন্ধ ছিল। বৃষ্টির পর দেখা গেল ছাদে 7 সেমি গভীর জল দাঁড়িয়ে গেছে। যে নলটি দিয়ে জল বের হয়, তার ব্যাস 7 সেমি। তা দিয়ে মিনিটে 200 মিটার জল বের হয়। নলটি খুলে দিলে কতক্ষণে সব জল বেরিয়ে যাবে ?

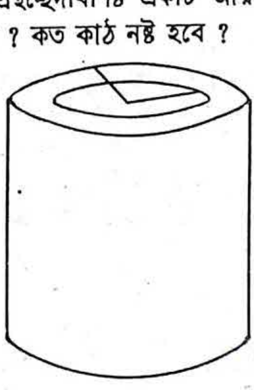
26. 10·5 মিটার লম্বা একটি লম্ব-বৃত্তাকার আলকাতরার ট্যাঙ্কের সঙ্গে 7 সেমি ব্যাসের একটি পাইপ লাগানো আছে। পাইপটি দিয়ে যদি মিনিটে 210 মিটার বেগে আলকাতরা বের করা যায়, তবে ভর্তি ট্যাঙ্কটি 45 মিনিটে খালি হয়। ট্যাঙ্কটির ব্যাস কত ?

27. 2·8 মি ব্যাসবিশিষ্ট একটি বাঁধানো কূপে জলের গভীরতা 4 মিটার। 11·2 সেমি ব্যাসবিশিষ্ট পাইপ দিয়ে 12·5 মিনিটে সমস্ত জল বের করতে হলে, মিনিটে কত বেগে জল পাম্প করতে হবে ?

28. 2 মিটার লম্বা একটি আয়তঘনাকার কাঠের লগের প্রস্থচ্ছেদ বর্গাকার এবং তার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 14 ডেসিমি। সবচেয়ে কম কাঠ নষ্ট করে ওই লগটিকে যদি একটি লম্ব-বৃত্তাকার গুঁড়িতে পরিণত করা যায়, তবে তাতে কত ঘন মিটার কাঠ থাকবে এবং কত ঘন মিটার কাঠ নষ্ট হবে ?

29. $12\sqrt{2}$ সেমি ব্যাসবিশিষ্ট 21 মিটার লম্বা একটি লম্ব-বৃত্তাকার কাঠের গুঁড়ি থেকে সবচেয়ে কম কাঠ নষ্ট করে বর্গাকার প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট একটি আয়তঘনাকার কাঠের লগ তৈরি করলে তাতে কত কাঠ থাকবে ? কত কাঠ নষ্ট হবে ?

30. ঢালাই লোহার একটি লম্ব-বৃত্তাকার ফাঁপা পাইপের ভিতর ও বাইরের ব্যাস যথাক্রমে 5·6 সেমি ও 7 সেমি। পাইপটি যদি 10 মিটার দীর্ঘ হয়, তবে তাতে কত ঘন ডেসিমি লোহা আছে ?



চিত্র নং : 35

31. ভূগর্ভস্থ পয়ঃপ্রণালী তৈরি করতে লম্ব-বৃত্তাকার যে সিমেন্ট পাইপ ব্যবহার করা হয়েছে, তার বাইরের ও ভিতরের ব্যাস যথাক্রমে 1·4 মি ও 1·05 মি। এরূপ 200 মিটার পাইপ তৈরি করতে কত ঘন মিটার ঢালাই মশলা প্রয়োজন হয়েছে ? ঐ মশলায় যদি সিমেন্ট : বালি : স্টোন-চিপস = 1 : 2 : 4 হয়, তবে কত ঘন মিটার সিমেন্ট লেগেছে ?

32. লোহার তৈরি একটি লম্ব-বৃত্তাকার গ্যাস জারের বাইরের ও ভিতরের ব্যাস যথাক্রমে 35 সেমি ও 28 সেমি। জারটির দৈর্ঘ্য যদি 1·2 মিটার হয়, তবে তাতে কত ঘন ডেসিমি লোহা আছে ? এক ঘন ডেসিমি লোহার ওজন 5 কেজি হলে, গ্যাস জারটির ওজন কত ?

33. 17·5 সেমি ব্যাসের 4টি লম্ব-বৃত্তাকার ঢালাই পিলারের চারিপাশে 3·5 সেমি পুরু বালি-সিমেন্টের প্লাস্টার করতে হবে। প্রতিটি পিলার যদি 3 মিটার লম্বা হয়, তবে কত ঘন ডেসিমি মশলা লাগবে ? প্লাস্টারের মশলা তৈরি করতে যদি 4 : 1 অনুপাতে বালি ও সিমেন্ট মেশাতে হয়, তবে কত ঘন ডেসিমি সিমেন্ট চাই ?

34. একটি লম্ব-বৃত্তাকার কেরোসিন ট্যাঙ্কারের ব্যাস 2·8 মিটার। কেরোসিন তেলপূর্ণ ওই ট্যাঙ্কারের তেল থেকে 8·4 ডেসিমি ব্যাসবিশিষ্ট 1·5 মিটার উঁচু 50টি ড্রাম ভর্তি করার পর যে তেল থাকবে তা দিয়ে 24 সেমি লম্বা, 22 সেমি চওড়া ও 35 সেমি উঁচু 500টি টিন ভর্তি করা যায়।

(i) ট্যাঙ্কারটির দৈর্ঘ্য কত ?

(ii) ড্রামগুলি ভর্তি করার পর ট্যাঙ্কারে কত তেল অবশিষ্ট ছিল ?

(iii) প্রতি টিনে কত লিটার তেল ধরে ? (1 ঘন ডেসিমি = 1 লিটার)

34. 14 মিটার লম্বা, 9 মিটার চওড়া এবং 3·3 মিটার গভীর একটি রিজার্ভ ট্যাঙ্কের $\frac{3}{5}$ অংশ পানীয় জলে পূর্ণ আছে। ওই জল থেকে জল নিয়ে লম্ব-বৃত্তাকার জলের ট্যাঙ্কার ভর্তি করে শহরের বিভিন্ন জায়গায় জল সরবরাহ করা হয়। 1·2 ডেসিমি ব্যাসের একটি পাম্প মিনিটে 350 মিটার হিসাবে জল তুলে যদি 7 মিনিটে এক একটি ট্যাঙ্কার ভর্তি করতে পারে, তবে,

(i) 5টি ট্যাঙ্কার ভর্তি করার পর রিজার্ভ ট্যাঙ্কের কত অংশ জলপূর্ণ ছিল ?

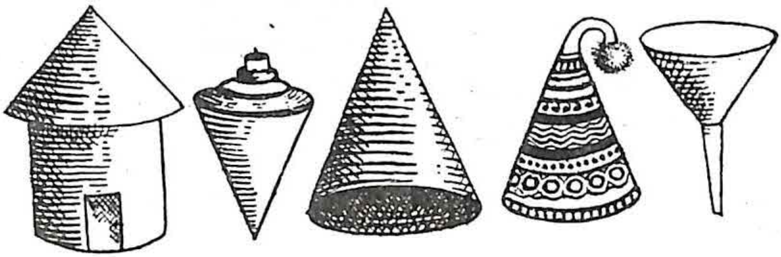
(ii) এক একটি ট্যাঙ্কারে কত জল ধরে ?

(iii) আরও 2 ট্যাঙ্কার জল নিলে রিজার্ভ ট্যাঙ্কে কত লিটার জল থাকবে ?

পঞ্চম অধ্যায়

লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কু (Right Circular Cone)

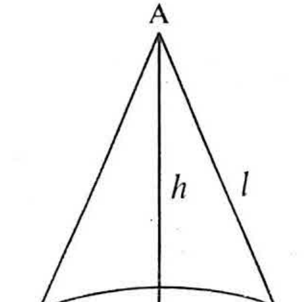
30 নং পৃষ্ঠায় তোমরা মোচার একটি অংশের ছবি দেখেছ। নিচে তারই মতো আকৃতির আরও কয়েকটি জিনিসের ছবি দেখ।



চিত্র নং ঃ 36

একটু লক্ষ করলেই দেখতে পাবে, উপরের চিত্রগুলির মোটা লাইন টানা অংশের আকৃতি একই প্রকার। এরূপ আকৃতির ঘনবস্তুকে লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কুর উদাহরণ বলা হয়।

পাশের চিত্রে একটি লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কুর রেখাচিত্র দেওয়া হল। চিত্রটি দেখেই বুঝতে পারছ যে, শঙ্কুটি যে-তলটির উপর দাঁড়িয়ে আছে তা একটি বৃত্তাকার সমতল। আর চারপাশে রয়েছে একটি বক্রতল যা উপরে একটি শীর্ষবিন্দুতে গিয়ে মিলিত হয়েছে। নিচের বৃত্তাকার তলকে শঙ্কুর ভূমি এবং চারপাশের বক্রতলকে শঙ্কুর পার্শ্বতল বলা যেতে পারে।



চিত্র নং ঃ 37

উপরের চিত্রে আরও দেখ, শীর্ষবিন্দু A থেকে ভূমিতলের কেন্দ্রবিন্দু O পর্যন্ত রেখাংশটি ভূমির উপর লম্ব। একে শঙ্কুর উচ্চতা বলা হয়, অর্থাৎ, এখানে AO = উচ্চতা।

আবার AC ও AB হেলানো রেখাংশ দুটি শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা। আবার, OC বৃত্তাকার ভূমিতলের ব্যাসার্ধ।

আরও একটি বিষয় লক্ষ কর। AO-কে যদি অক্ষরেখা ধরা যায় এবং AB বা AC-কে যদি উৎপাদক রেখা ধরা যায়, তবে দেখা যাবে যে, AO অক্ষের চার পাশে AB-এর আবর্তনের ফলেই শঙ্কুটির উৎপত্তি হয়েছে। সুতরাং AO শঙ্কুর অক্ষরেখা এবং AB উৎপাদন রেখা।

শঙ্কুর ভূমিতল, পার্শ্বতল ও সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ঃ

এবার, যদি ভূমির ব্যাসার্ধ $= OC = r$, উচ্চতা $= AO = h$

এবং তির্যক উচ্চতা $= AB = l$ ধরা যায়, তবে

শঙ্কুটির ভূমিতলের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গ একক।

পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ ভূমিতলের পরিধি × তির্যক-উচ্চতা

$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times l$ বর্গ একক

$= \pi r l$ বর্গ একক।

অর্থাৎ, শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল $= \pi r l$ বর্গ একক

আবার, শঙ্কুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= (\pi r^2 + \pi r l)$ বর্গ একক

$= \pi r(r + l)$ বর্গ একক

$= \pi$ ব্যাসার্ধ (ব্যাসার্ধ + তির্যক উচ্চতা)।

শঙ্কুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

$= \pi$ ব্যাসার্ধ (ব্যাসার্ধ + তির্যক উচ্চতা) $= \pi r(r + l)$

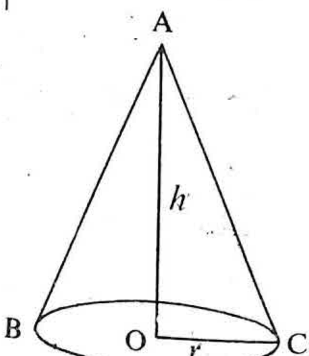
মনে কর, একটি শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধ এবং উচ্চতা জানা আছে ; শঙ্কুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।

পাশের চিত্রের ABC শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধ $= OC = r$

এবং উচ্চতা $= AO = h$;

কিন্তু তির্যক উচ্চতা দেওয়া নেই। শঙ্কুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।

শঙ্কুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের যে সূত্র আমরা পেয়েছি তাতে তির্যক উচ্চতার মান প্রয়োজন।



চিত্র নং ঃ 38

এখানে তির্যক-উচ্চতা AC-এর দৈর্ঘ্য সরাসরি দেওয়া না থাকলেও আমরা কিন্তু AOC সমকোণী ত্রিভুজ থেকে AC-এর মান পেতে পারি যেমন,

$$AC^2 = AO^2 + OC^2$$
$$= h^2 + r^2$$
$$\therefore \quad AC = \sqrt{h^2 + r^2}$$

সুতরাং, শঙ্কুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল হবে $= \pi r (r + \sqrt{h^2 + r^2})$

শঙ্কুর আয়তন বা ঘনফল ঃ

শঙ্কুর আয়তন বা ঘনফল $= \frac{1}{3}$ ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

$= \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h$ ঘন একক

$= \frac{1}{3} \pi r^2 h$ ঘন একক

শঙ্কুর ঘনফল $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$

উদাহরণ 1. একটি লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমির ব্যাস 7 সেমি এবং তির্যক উচ্চতা 10 সেমি। শঙ্কুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

পাশের ABC শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাস 7 সেমি,

$\therefore$ ব্যাসার্ধ $= r = 3{\cdot}5$ সেমি

এবং তির্যক-উচ্চতা $= l = 10$ সেমি

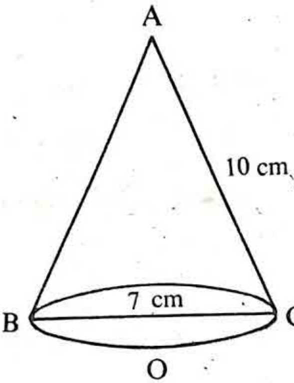
$\therefore$ শঙ্কুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

$= \pi r (r + l)$

$= \pi \times 3{\cdot}5\,(3{\cdot}5 + 10)$ বর্গ সেমি

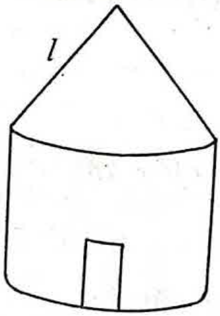
$= \frac{22}{7} \times 3{\cdot}5 \times 13{\cdot}5$ বর্গ সেমি

$= 148{\cdot}5$ বর্গ সেমি



চিত্র নং ঃ 39

উদাহরণ 2. একটি তাবুর লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির ছাদটি তৈরি করতে 132 বর্গ মিটার ত্রিপল লেগেছে। ছাদটির ভূমিতলের পরিধি 33 মিটার হলে, ছাদটির তির্যক উচ্চতা কত ?



চিত্র নং ঃ 40

মনে করি, ছাদটির তির্যক উচ্চতা l মিটার। আমরা জানি, শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}$ ভূমির পরিধি × তির্যক উচ্চতা

$\therefore$ প্রশ্নের শর্তানুসারে

$$\frac{1}{2} \times 33 \times l = 132$$

$$\therefore \quad l = 132 \times \frac{2}{33}$$

$$= 8$$

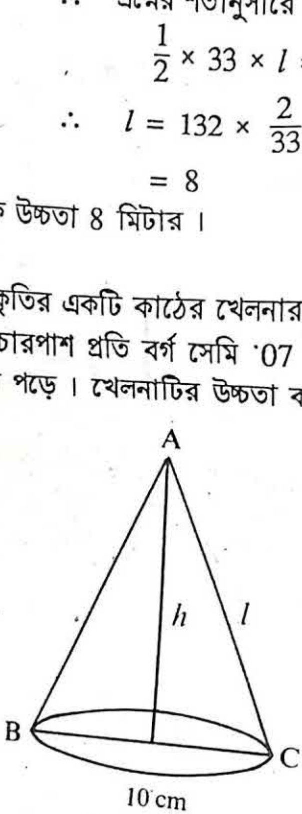
$\therefore$ ছাদটির তির্যক উচ্চতা 8 মিটার।

উদাহরণ **3.** লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির একটি কাঠের খেলনার ভূমি-তলের ব্যাস 10 সেমি। এই খেলনাটির চারপাশ প্রতি বর্গ সেমি ˙07 টাকা হিসাবে পালিশ করতে 19˙80 টাকা খরচ পড়ে। খেলনাটির উচ্চতা কত ?

প্রতি বর্গ সেমি ˙07 টাকা হিসাবে 19˙80 টাকায় পালিশ করা হয় $\frac{19 \cdot 80}{\cdot 07}$ বর্গ সেমি $= \frac{1980}{7}$ বর্গ সেমি।

$\therefore$ খেলনাটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= \frac{1980}{7}$ বর্গ সেমি।

মনে করি, খেলনাটির তির্যক উচ্চতা l সেমি।



চিত্র নং ঃ 41

সুতরাং, প্রশ্নের শর্তানুযায়ী,

$$\pi . 5 (5 + l) = \frac{1980}{7} \text{ বা, } \frac{22 \times 5}{7} (5 + l) = \frac{1980}{7}$$

$$\text{বা, } 5 + l = \frac{1980 \times 7}{22 \times 5 \times 7}$$

$$\text{বা, } 5 + l = 18, \quad \text{বা, } l = 18 - 5$$

$$\therefore \quad l = 13.$$

সুতরাং, খেলনাটির তির্যক উচ্চতা 13 সেমি।

এবার মনে করি, খেলনাটির উচ্চতা h সেমি।

তাহলে, $h^2 = l^2 - 5^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$

$\therefore \quad h = \sqrt{144} = 12$

$\therefore$ খেলনাটির উচ্চতা 12 সেমি।

উদাহরণ 4. লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির একটি জলের ট্যাঙ্কের ভিতরের দিকের ভূমিতলের ব্যাস 28 মিটার এবং উচ্চতা 18 মিটার। ট্যাঙ্কটিতে কত লিটার জল ধরে ? (1 লিটার = 1 ঘন ডেসিমি)

ট্যাঙ্কটির ভিতরের দিকের ভূমিতলের ব্যাসার্ধ $= 28$ মি $\div 2 = 14$ মি।

$\therefore$ ট্যাঙ্কটির ঘনফল $= (\frac{1}{3}\pi . 14^2 \times 18)$ ঘন মিটার

$= (\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 18)$ ঘন মিটার

$= 3696$ ঘন মিটার

$= 3696000$ ঘন ডেসিমি।

সুতরাং, ট্যাঙ্কটিতে 3696000 লিটার বা 3696 কিলোলিটার জল ধরে।

উদাহরণ 5. একটি লম্ব-বৃত্তাকার চোঙ এবং লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কু উভয়েরই ভূমিতলের ব্যাস 21 সেমি এবং উচ্চতা 24 সেমি। প্রত্যেকটির আয়তন নির্ণয় কর এবং তা থেকে এদের আয়তনের তুলনা কর।

ভূমিতলের ব্যাস 21 সেমি, সুতরাং ব্যাসার্ধ 10·5 সেমি।

এখন, লম্ব-বৃত্তাকার চোঙের আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

$= (\pi \times 10{\cdot}5^2 \times 24)$ ঘন সেমি

$= (\frac{22}{7} \times 10{\cdot}5 \times 10{\cdot}5 \times 24)$ ঘন সেমি

$= 8316$ ঘন সেমি

এবং লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তন $= \frac{1}{3}$ ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

$= (\frac{1}{3}\pi \times 10{\cdot}5^2 \times 24)$ ঘন সেমি

$= 2772$ ঘন সেমি

সুতরাং, চোঙের আয়তন : শঙ্কুর আয়তন $= 8316 : 2772 = 3 : 1$

অর্থাৎ, একই ভূমিতল ও একই উচ্চতাবিশিষ্ট চোঙের আয়তন শঙ্কুর আয়তনের দ্বিগুণ।

বিঃ দ্রঃ—"চোঙের আয়তনের সূত্র = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা এবং শঙ্কুর আয়তনের সূত্র = $\frac{1}{3}$ ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা"—এ থেকেও এই সম্পর্কটি পাওয়া যায়।

প্রশ্নমালা 6

1. একটি লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাস 14 সেমি এবং তার তির্যক উচ্চতা 12 সেমি। শঙ্কুটির পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল কত ?

2. লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির একটি বয়ার ভূমিতলের ব্যাস 3 মি এবং উচ্চতা 2 মি। ওই বয়াটির চারিপাশ রং করতে প্রতি বর্গ ডেসিমি 0·07 টাকা হিসাবে কত খরচ পড়বে ?

3. লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির একটি সোলার টুপীর বাহরের চারপাশ রাংতা কাগজ দিয়ে মুড়তে $817\frac{1}{7}$ বর্গ সেমি রাংতা কাগজ খরচ হয়। টুপীটির ভূমিতলের ব্যাস 20 সেমি হলে টুপীটির উচ্চতা কত ?

4. লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির একটি তাবু তৈরি করতে 77 বর্গ মি ত্রিপল লেগেছে। তাবুটির তির্যক উচ্চতা যদি 7 মিটার হয়, তবে তাবুটির ভূমিতলের ক্ষেত্রফল কত ?

5. $201\frac{1}{7}$ বর্গমিটার বৃত্তাকার ভূমিতলের উপর একটি 15 মি উঁচু লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির তাবু তৈরি করতে কত বর্গ মিটার ত্রিপল লাগবে ? তাবুটির তির্যক উচ্চতা কত হবে ?

6. শঙ্কু আকৃতির একটি কাঠের খেলনার ভূমিতলের ব্যাস 1·4 ডেসিমি এবং উচ্চতা 1·2 ডেসিমি। খেলনাটিতে কত ঘন ডেসিমি কাঠ আছে ?

7. একটি শঙ্কু আকৃতির জলের ট্যাঙ্কের ভিতরের দিকের ভূমিতলের ব্যাস 21 মি এবং তির্যক উচ্চতা 17·5 মি। ট্যাঙ্কটিতে কত জল ধরে ?

8. লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির একটি তাবুর ভূমিতলের ক্ষেত্রফল 13·86 বর্গ মিটার এবং উচ্চতা 2·8 মি। তাবুটি তৈরি করতে কত বর্গ মিটার ক্যানভ্যাস লেগেছে ? তাবুটিতে কত লিটার বায়ু আছে ?

9. লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির একটি লোহার পাতের বয়া তৈরি করতে $75\frac{3}{7}$ বর্গ মিটার লোহার পাত লেগেছে। বয়াটির তির্যক উচ্চতা যদি 5 মি হয়, তবে বয়াটিতে কত বায়ু আছে এবং বয়াটির উচ্চতা কত ? (লোহার পাতের বেধ হিসাবের মধ্যে ধরতে হবে না।)

10. একজন রাজমিস্ত্রীর শঙ্কু আকৃতির ওলানটির (যা দিয়ে রাজমিস্ত্রীরা উল্লম্ব রেখা নির্ণয় করে) ভূমিতলের ব্যাস 3 সেমি এবং তির্যক উচ্চতা 2·5 সেমি। ওলানটিতে কত ঘন সেমি ধাতু আছে ?

11. লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির একটি পাহাড়ের তির্যক উচ্চতা 2·5 কিমি এবং পাহাড়টির ভূমিতলের ক্ষেত্রফল 1·54 বর্গ কিমি। পাহাড়টির উচ্চতা কত ?

12. একটি লম্ব-বৃত্তাকার ড্রামে কিছু জল আছে। 2·8 ডেসিমি ব্যাস ও 3 ডেসিমি উচ্চতাবিশিষ্ট একটি শঙ্কু আকৃতির লোহার টুকরো ঐ জলে সম্পূর্ণ ডোবানোর ফলে ড্রামে জলতল 0·64 ডেসিমি উপরে উঠে এল। ড্রামটির ব্যাস কত ?

13. একটি লম্ব-বৃত্তাকার ড্রামের ব্যাস এবং একটি শঙ্কু আকৃতির লোহার টুকরোর ভূমিতলের ব্যাস $2r$ ডেসিমি। ড্রাম ও শঙ্কু উভয়ের উচ্চতা h ডেসিমি। জল ভর্তি ড্রামটিতে লোহার টুকরোটি সম্পূর্ণ ডুবিয়ে আবার তুলে নেওয়া হল। দেখা গেল ড্রামে এখন জলের গভীরতা রয়েছে $\frac{2h}{3}$ এতে কি প্রমাণিত হল ? অঙ্ক কষে বিষয়টি বুঝিয়ে দাও।

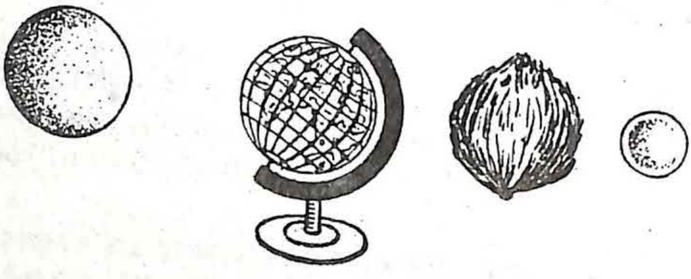
14. শোলা দিয়ে তৈরি একটি শঙ্কু আকৃতির মাথার টোপরের ভূমির বাইরের দিকের ব্যাস 21 সেমি। টোপরটির উপরিভাগ রাংতা দিয়ে মুড়তে প্রতি বর্গ সেমি 2 পয়সা হিসাবে 11·55 টাকা খরচ পড়ে। টোপরটির উচ্চতা ও তির্যক উচ্চতা কত ?

15. আনোয়ারদের বাড়ির ধানের মড়াইটির নিচের অংশ লম্ব-বৃত্তাকার চোঙ আকৃতির এবং উপরের অংশ শঙ্কু আকৃতির। এর ভূমির ব্যাস 2·1 মিটার। চোঙ-আকৃতি অংশের উচ্চতা 2 মিটার এবং শঙ্কু-আকৃতি অংশের উচ্চতা 1·4 মিটার। মড়াইটির $\frac{1}{3}$ অংশ যখন ধান ভর্তি থাকে তখন তাতে কত ঘন ডেসিমি ধান থাকে ?

ষষ্ঠ অধ্যায়

গোলক (Sphere)

30 নং পৃষ্ঠায় তোমরা ফুটবল ও ভূগোলকের ছবি দেখেছ। নিচের চিত্রে অনুরূপ আকৃতির আরও কয়েকটি জিনিসের ছবি দেখ।

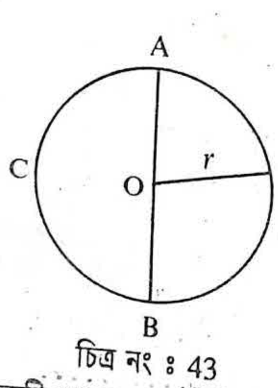


চিত্র নং ঃ 42

উপরের আকৃতির জিনিসগুলিকে আমরা গোলকের উদাহরণ বলতে পারি।

উপরের ছবিগুলি থেকে তোমরা নিশ্চয় বুঝতে পেরেছ যে, গোলক একটিমাত্র বক্রতল দিয়ে তৈরি।

নিচে একটি গোলকের রেখাচিত্র দেওয়া হল।



চিত্র নং ঃ 43

উপরের চিত্রে O বিন্দুটি গোলকের মধ্যস্থলে এমন একটি বিন্দু যা থেকে গোলকের উপরের যেকোনো বিন্দুর দূরত্ব সমান। এই বিন্দুকে গোলকের

কেন্দ্রবিন্দু বলা হয়। কেন্দ্রবিন্দু থেকে গোলকের উপরে যেকোনো বিন্দুর দূরত্বকে গোলকের ব্যাসার্ধ বলে।

আগের পৃষ্ঠায় উপরের দিকের চিত্রে দেখ, ভূগোলকের মাঝখান দিয়ে একটি দণ্ড এমনভাবে আছে যার চারপাশে গোলকটিকে ঘোরানো যায়। আবার ওই পৃষ্ঠারই নিচের দিকের রেখাচিত্রে AB রেখাংশটি, যা গোলকের কেন্দ্রবিন্দুর উপর দিয়ে গিয়ে তার বাইরের বক্রতলের বিপরীত দুই বিন্দুতে মিলেছে, তা ওই দণ্ডের অনুরূপ। এই AB রেখাংশকে গোলকের অক্ষরেখা বলা হয়। একটু লক্ষ করলেই বুঝতে পারবে যে, এই AB রেখাংশকে স্থির রেখে তার উপরে দণ্ডায়মান ACB অর্ধবৃত্তটির আবর্তনের ফলেই গোলকটি তৈরি হয়েছে। তাই এখানে AB গোলকের অক্ষরেখা এবং ACB বৃত্তচাপ উৎপাদক রেখা।

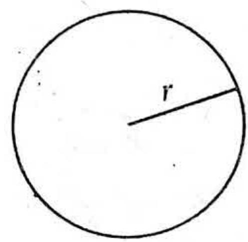
গোলকের আর একটি বিশেষত্ব এই যে, যেকোনো একটি সমতল দিয়ে গোলকের যেকোনো একটি অংশ ছেদ করলেই একটি বৃত্তাকার তল পাওয়া যাবে।

গোলকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ঃ

গোলকের ব্যাসার্ধকে যদি r ধরা হয়, তবে ব্যাস হবে $2r$

এখন গোলকের বক্রপৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= \pi \times$ ব্যাস^2

$= 4\pi r^2$ বর্গ একক



চিত্র নং ঃ 44

$\therefore$ গোলকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$

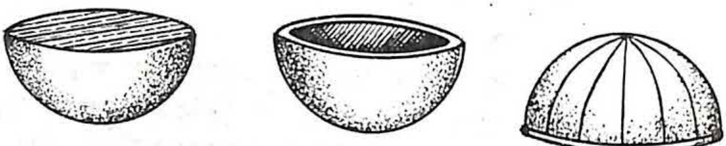
গোলকের আয়তন বা ঘনফল ঃ

গোলকের আয়তন বা ঘনফল $= \frac{4}{3}\pi$ ব্যাসার্ধ^3

$= \frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক

$\therefore$ গোলকের আয়তন বা ঘনফল $= \frac{4}{3}\pi r^3$

অর্ধ-গোলক ঃ

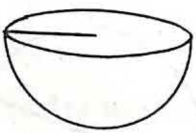


1 2 3

চিত্র নং ঃ 45

উপরের চিত্রগুলির 1 নং হল একটি ধাতু গোলকের অর্ধ অংশ, 2 নং হল একটি অর্ধ-গোলাকাকৃতি বাটি, আর 3 নং চিত্রটি হল একটি গম্বুজের চিত্র। এদের অর্ধ-গোলকের উদাহরণ বলা যায়। নিরেট অর্ধ-গোলকের দুটি তল, একটি বৃত্তাকার সমতল, অন্যটি গোলাকৃতি বক্রতল।

অর্ধ-গোলকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ঃ



চিত্র নং ঃ 46

মনে করি, অর্ধ-গোলকটির ব্যাসার্ধ r.

$\therefore$ তার বৃত্তাকার সমতলের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গ একক।

এবং গোলাকৃতি বক্রতলে ক্ষেত্রফল $= \dfrac{4\pi r^2}{2}$ বর্গ একক

সুতরাং অর্ধ-গোলকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

$= (\pi r^2 + 2\pi r^2)$ বর্গ একক

$= 3\pi r^2$ বর্গ একক

$\therefore$ অর্ধ-গোলকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 3\pi r^2$

অর্ধ-গোলকের আয়তন বা ঘনফল ঃ

অর্ধ-গোলকের আয়তন স্বাভাবিকভাবেই গোলকের আয়তনের অর্ধেক হবে ; অর্থাৎ $\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \div 2\right)$ ঘন একক

$= \frac{2}{3}\pi r^3$ ঘন একক হবে।

$\therefore$ অর্ধ-গোলকের আয়তন $= \frac{2}{3}\pi r^3$

উদাহরণ **1.** একটি ফুটবলের ব্যাস 28 সেমি। ফুটবলটি তৈরি করতে কত বর্গ সেমি চামড়া লেগেছে ?

প্রয়োজনীয় চামড়ার ক্ষেত্রফল $= (\pi \times 28^2)$ বর্গ সেমি

$= (\frac{22}{7} \times 28 \times 28)$ বর্গ সেমি

$= 2464$ বর্গ সেমি

$\therefore$ বলটি তৈরি করতে 2464 বর্গ সেমি চামড়া লেগেছে।

উদাহরণ **2.** তোমাদের স্কুলে সট-পুট খেলার জন্য যে লোহার বলটি ব্যবহার করা হয় তার ব্যাস 14 সেমি। বলটিতে কত ঘন সেমি লোহা আছে ?

বলটির ব্যাস = 14 সেমি

$\therefore$ ব্যাসার্ধ = 7 সেমি

সুতরাং বলটিতে লোহা আছে $(\frac{4}{3}\pi \times 7^3)$ ঘন সেমি

$= (\frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 7)$ ঘন সেমি

$= \frac{4312}{3}$ ঘন সেমি

$= 1437\frac{1}{3}$ ঘন সেমি

$\therefore$ বলটিতে $1437\frac{1}{3}$ ঘন সেমি লোহা আছে।

উদাহরণ **3.** 3 সেমি, 4 সেমি ও 5 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট তিনটি তামার গোলক গলিয়ে একটি বড় গোলক তৈরি করা হল। বড় গোলকটির ব্যাসার্ধ কত হবে ?

মনে করি, বড় গোলকটির ব্যাসার্ধ x সেমি।

সুতরাং, প্রশ্নের শর্তানুযায়ী

$$\frac{4}{3}.\pi.x^3 = \frac{4}{3}.\pi.3^3 + \frac{4}{3}.\pi.4^3 + \frac{4}{3}.\pi.5^3$$

$$= \frac{4}{3}.\pi.(3^3 + 4^3 + 5^3)$$

$$= \frac{4}{3}.\pi.(27 + 64 + 125).$$

$$\therefore x^3 = 27 + 64 + 125 = 216 = 6 \times 6 \times 6$$

$$\therefore x = 6.$$

$\therefore$ বড় গোলকটির ব্যাসার্ধ হবে 6 সেমি।

উদাহরণ **4.** 28 সেমি ব্যাসবিশিষ্ট একটি লম্ব-বৃত্তাকার চোঙে এত জল আছে যে তাতে সমান ব্যাসের তিনটি লোহার গোলক সম্পূর্ণ ডোবানো যায়। গোলকগুলি ডোবানোর আগে জলতল যা ছিল, গোলকগুলি ডোবানোর ফলে জলতল 7 সেমি উঠে যায়। গোলকগুলির ব্যাস কত ?

মনে করি, গোলকগুলির ব্যাসার্ধ r সেমি

সুতরাং, প্রশ্নের শর্তানুযায়ী

$$3 \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi \times 14^2 \times 7$$

বা, $4r^3 = 14 \times 14 \times 7$

$$\therefore \quad r^3 = \frac{14 \times 14 \times 7}{4} = 7 \times 7 \times 7$$

$$\therefore \quad r = 7$$

সুতরাং গোলকগুলির ব্যাসার্ধ = 7 সেমি ;

$\therefore$ তাদের ব্যাস = 14 সেমি।

উদাহরণ **5.** 21 সেমি ব্যাসার্ধ ও 21 সেমি উচ্চতাবিশিষ্ট একটি লম্ব-বৃত্তাকার ড্রাম সম্পূর্ণ জলপূর্ণ আছে। ওই ড্রামে 21 সেমি ব্যাসের একটি লোহার গোলক সম্পূর্ণ ডুবিয়ে তুলে নেওয়া হল। এ থেকে ড্রামের আয়তন ও গোলকের আয়তনের অনুপাত নির্ণয় কর। গোলকটি তুলে নেওয়ার পর ড্রামে জলের গভীরতা কত হবে ?

$\because$ ড্রামের ব্যাসার্ধ 21 সেমি,

$\therefore$ ড্রামটিতে জল ধরে

($\pi \times 21^2 \times 21$) ঘন সেমি

$= (\frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 21)$ ঘন সেমি

= 29106 ঘন সেমি

জলপূর্ণ ড্রামে গোলকটি সম্পূর্ণ ডোবালে গোলকের আয়তনের সমান জল পড়ে যাবে।

গোলকের ব্যাস 21 সেমি, সুতরাং গোলকের ব্যাসার্ধ 10·5 সেমি।

গোলকের আয়তন $= (\frac{4}{3}\pi \times 10{\cdot}5^3)$ ঘন সেমি

$= (\frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 10{\cdot}5 \times 10{\cdot}5 \times 10{\cdot}5)$ ঘন সেমি

= 4851 ঘন সেমি

ড্রামের আয়তন : গোলকের আয়তন = 29106 : 4851 = 6 : 1.

গোলকটি সম্পূর্ণ ডুবিয়ে দিলে গোলকের আয়তনের সমান আয়তনের জল পড়ে যাবে এবং পরে গোলকটি তুলে নিলে ড্রামে জলের গভীরতা কমে যাবে। মনে করি, নতুন গভীরতা হল h.

সুতরাং, শর্তানুযায়ী

$$\pi \times 21^2 h = 29106 - 4851$$
$$= 24255$$
$$\therefore \; h = \frac{24255 \times 7}{22 \times 21 \times 21} = 17{\cdot}5$$

$\therefore$ জলের নতুন গভীরতা হবে 17·5 সেমি।

বিঃ দ্রঃ—এখানে গোলকের ব্যাস, ড্রামের ব্যাসার্ধ ও ড্রামের উচ্চতা $= 2r$

ড্রামের আয়তন $= 4\,\pi r^2 h$,

এখানে, যেহেতু $h = 2r$, সুতরাং ড্রামের আয়তন $= 8\,\pi r^3$

আবার গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$\therefore$ তাদের অনুপাত $8\,\pi r^3 : \frac{4}{3}\pi r^3 = 8 : \frac{4}{3} = 6 : 1$

উদাহরণ 6. 2·1 ডেসিমি ব্যাসার্ধের একটি নিরেট পিতলের গোলককে পিটিয়ে 7 সেমি লম্বা একটি লম্ব-বৃত্তাকার দণ্ড তৈরি করা হল। দণ্ডটির ব্যাস কত হবে ? দণ্ডটি এবং গোলকটির প্রত্যেক সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত কি হবে ?

মনে করি, লম্ব-বৃত্তকার দণ্ডের ব্যাসার্ধ r সেমি।

সুতরাং, প্রশ্নের শর্তানুযায়ী

$$\pi \times r^2 \times 7 = \frac{4}{3} \times \pi \times 21^3$$
$$\therefore \; r^2 = \frac{4}{3} \times \frac{21 \times 21 \times 21}{7}$$
$$= 4 \times 21 \times 21$$
$$\therefore \; r = \sqrt{4 \times 21 \times 21} = 42.$$

$\therefore$ দণ্ডের ব্যাসার্ধ হবে 42 সেমি

$\therefore$ দণ্ডের ব্যাস হবে 84 সেমি $= 8{\cdot}4$ ডেসিমি

এবার পাতটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi.42\,(42 + 7)$ বর্গ সেমি

$= (2 \times \frac{22}{7} \times 42 \times 49)$ বর্গ সেমি

$= 12936$ বর্গ সেমি

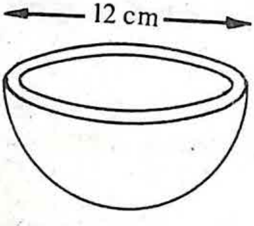
এবং গোলকের তলের ক্ষেত্রফল $= 4 . \pi . 21^2$ বর্গ সেমি

$= 5544$ বর্গ সেমি

$\therefore$ পাতের সমগ্রতল : গোলকের তল $= 12936 : 5544$

$= 7 : 3$

উদাহরণ **7.** 1 সেমি পুরু তামার পাত দিয়ে তৈরি একটি অর্ধ-বৃত্তাকার বাটির মুখের বাইরের দিকের ব্যাস 12 সেমি। প্রতি ঘন সেমি তামার ওজন 8·85 গ্রাম হলে, বাটিটির ওজন কত হবে ?



চিত্র নং : 47

বাটিটিতে যতটুকু তামা আছে তার আয়তন

$= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3}\pi \times 6^3 - \frac{4}{3}\pi \times 5^3 \right)$ ঘন সেমি

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 91$ ঘন সেমি

$= \frac{572}{3}$ ঘন সেমি

যেহেতু 1 ঘন সেমি তামার জন 8·85 গ্রাম

সুতরাং বাটিটির ওজন হবে $= \frac{572}{3} \times 8{\cdot}85$ গ্রাম

$= 1687{\cdot}4$ গ্রাম

$= 1$ কেজি $687{\cdot}4$ গ্রাম।

প্রশ্নমালা 7

1. লোহার পাতে তৈরি একটি গোলকের ব্যাস 14 সেমি। গোলকটিকে রং করতে প্রতি বর্গ ডেসিমি 1·50 টাকা হিসাবে কত খরচ পড়বে ?

2. একটি চামড়ার বল তৈরি করতে প্রতি বর্গ ডেসিমি 3·50 টাকা হিসাবে 86·24 টাকার চামড়া লেগেছে। বলটির ব্যাস কত ?

3. অর্ধ-গোলকাকৃতি একটি বাটি তৈরি করতে 173·25 বর্গ সেমি পাত লেগেছে। বাটিটির মুখের ব্যাস কত হবে ?

4. একটি নিরেট লোহার গোলার ব্যাসার্ধ 2·1 সেমি। গোলাটিতে কত ঘন সেমি লোহা আছে ? গোলাটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল কত ?

5. একটি নিরেট সীসার গোলকের ব্যাস 14 সেমি। এই গোলকটি গলিয়ে 3·5 সেমি ব্যাসার্ধের কতগুলি গোলক তৈরি করা যাবে ?

6. 6·6 ডেসিমি দীর্ঘ, 4·2 ডেসিমি প্রশস্ত এবং 1·4 ডেসিমি পুরু একটি তামার আয়তঘনাকার টুকরো গলিয়ে 2·1 ডেসিমি ব্যাসের কয়টি গোলক ঢালাই করা যাবে ? প্রতিটি গোলকে কত ঘন ডেসিমি ধাতু থাকবে ?

7. এক অর্ধ-গোলকাকার গম্বুজের ভূমিতলের ব্যাস 42 ডেসিমি । গম্বুজটির উপরিতল রং করতে প্রতি বর্গ মিটার 1·50 টাকা হিসাবে কত খরচ পড়বে ?

8. একই ধাতুর পাত থেকে তৈরি দুটি ফাঁকা গোলকের ব্যাস যথাক্রমে 21 সেমি ও 17·5 সেমি । গোলক দুটি তৈরি করতে যে পরিমাণ ধাতুর পাত লেগেছে তার অনুপাত কত ?

9. 4·2 সেমি ব্যাসার্ধের একটি সোনার নিরেট গোলককে পিটিয়ে 2·8 সেমি ব্যাসের লম্ব-বৃত্তাকার বার তৈরি করা হল । বারটির দৈর্ঘ্য কত হবে ?

10. একটি নিরেট লম্ব-বৃত্তাকার দণ্ডের প্রস্থচ্ছেদের ব্যাসার্ধ 3·2 ডেসিমি । সেই দণ্ডটি গলিয়ে 21টি নিরেট গোলক তৈরি করা হল । গোলকগুলির ব্যাসার্ধ যদি 8 সেমি হয়, তবে দণ্ডটির দৈর্ঘ্য কত ছিল ?

11. একটি 12 সেমি ব্যাসের নিরেট লোহার গোলককে পিটিয়ে একটি লম্ব-বৃত্তাকার দণ্ড তৈরি করা হল । দণ্ডটির দৈর্ঘ্য যদি 18 সেমি হয়, তবে তার ব্যাস কত হবে ?

12. 21 ডেসিমি দীর্ঘ, 11 ডেসিমি প্রশস্ত এবং 6 ডেসিমি গভীর একটি চৌবাচ্চার অর্ধেক জলপূর্ণ আছে । এখন সেই চৌবাচ্চায় যদি 21 সেমি ব্যাসের 100টি লোহার গোলক ডুবিয়ে রাখা হয়, তবে জলতল কত ডেসিমি উঠে আসবে ?

13. একটি লম্ব-বৃত্তাকার চোঙ ও একটি গোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল সমান । যদি চোঙ ও গোলকের ব্যাসার্ধ সমান হয়, তবে দেখাও যে তাদের ঘনফলের অনুপাত 3 : 2 হবে ।

14. 36 সেমি লম্বা এবং 4 সেমি ব্যাসবিশিষ্ট একটি নিরেট ধাতব লম্ব-বৃত্তাকার দণ্ড গলিয়ে 6 সেমি ব্যাসের কয়টি নিরেট গোলক তৈরি করা যাবে ?

15. 6 ডেসিমি ব্যাসের একটি নিরেট রৌপ্য গোলক গলিয়ে 1 ডেসিমি লম্বা একটি লম্ব-বৃত্তাকার দণ্ড তৈরি করা হল । দণ্ডটির ব্যাস কত হবে ?

উত্তরমালা

পরিমিতি

প্রশ্নমালা 1

1. 150 বর্গমিটার এবং 50 মিটার 2. 864 বর্গ মি 3. 4200 বর্গ মি
4. 64 বর্গ মি 5. 162 টা. 6. 2000 টালি
7. 659·34 বর্গ মি, 62·64 বর্গ মি 8. 35 বর্গ সেমি 9. 45 সেমি
10. উচ্চতা $= 4\sqrt{3}$ সেমি, ক্ষেত্রফল $= 16\sqrt{3}$ বর্গ সেমি
11. পরিসীমা $= 30\sqrt{3}$ সেমি, ক্ষেত্রফল $= 75\sqrt{3}$ বর্গ সেমি
12. 42 বর্গ সেমি 13. 4·615 সেমি (প্রায়) 14. $16\sqrt{3}$ বর্গ সেমি, 24 সেমি
15. 12 বর্গ সেমি 16. 12 সেমি, 48 বর্গ সেমি 17. 15 সেমি
18. 48 সেমি, 108 বর্গ সেমি 19. 12 সেমি 20. $40\sqrt{3}$ বর্গ সেমি
21. ক্ষেত্রফল $= 108\sqrt{15}$ বর্গ মি, $\frac{9\sqrt{15}}{2}$ মিটার
22. 3·4 কিমি, 32130·00 টাকা 23. 150 বর্গ মিটার
24. পরিসীমা = 24 ডেসিমি, ক্ষেত্রফল = 24 বর্গ ডেসিমি
25. 15 মিটার 26. $324\sqrt{6}$ বর্গ মি 27. $30\sqrt{13}$ কিমি 28. 26 মি
29. 16 : 9 30. 15 সেমি

প্রশ্নমালা 2

1. 132 মি 2. 110 সেমি 3. 114·40 টা 4. 12500 বার
5. 2 বার, 5 বার 6. 17·5 সেমি 7. 1540 মি, 154 মি
8. 46·2 কিমি 9. 7 সেমি 10. 4·4 ডেসিমি 11. 21 সেমি
12. 8 সেমি, 12 সেমি 13. 63 মি 14. 3·5 সেমি
15. 77 মি, 21 মি 16. 22 সেমি 17. 14400 বার।

প্রশ্নমালা 3

1. *(i)* 5544 বর্গ মি *(ii)* 154 বর্গ সেমি *(iii)* 124·74 বর্গ মি
(iv) 75 বর্গ মি 46 বর্গ ডেসিমি
2. 154 বর্গ মি 3. 42 মি, 1386 বর্গ মি 4. 28 মি
5. 16·94 বর্গ মি 6. 1232 বর্গ মি 7. 12474 বর্গ মি 8. 550 বর্গ সেমি
9. 56 সেমি, 196 বর্গ সেমি 10. 42 বর্গ মি
11. $\sqrt{22} : 2\sqrt{7}$ 12. 21 সেমি 13. 1389850 বর্গ মিটার
14. 45·5 বর্গ সেমি 15. 346·5 বর্গ মি 16. 6 কিগ্রা 160 গ্রা, 154 গ্রা.
17. 9 : 25 : 49

বিবিধ প্রশ্নমালা

1. $A = 50$ বর্গ সেমি, $A = \frac{25\sqrt{3}}{4}$ বর্গ সেমি, $h = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ সেমি ; $A = 36$ বর্গ সেমি, $l = b = 2\sqrt{5}$ সেমি, $l = b = 9\sqrt{2}$ মি, 162 বর্গ মি ; $A = 32$ বর্গ মি ; $A = 2\sqrt{21}$ বর্গ মি ; $h = \sqrt{21}$ মি ; $A = 9{\cdot}922$ বর্গ সেমি (প্রায়) ; $A = 6$ বর্গ মি ; $A = 154$ বর্গ সেমি ; $A = 38{\cdot}5$ বর্গ মি ; $A = 14\frac{1}{7}$ বর্গ মি

2. (*i*) 39 সেমি (*ii*) 27 সেমি (*iii*) 84 ডেসিমি (*iv*) 36 মি (*v*) 12 মি (*vi*) 28 সেমি (*vii*) $64\sqrt{2}$ মি (*viii*) 20 সেমি (*ix*) 26 সেমি (*x*) 44 মিমি

3. (*i*) 10 মি (*ii*) 30 মি (*iii*) $4\sqrt{3}$ মি, $16\sqrt{3}$ বর্গ মি (*iv*) $12\sqrt{3}$ সেমি, $108\sqrt{3}$ বর্গ সেমি 4. 30 বঃ সেমি 5. 5·4 মি 6. 12·5 মি 7. $12\sqrt{7}$ বর্গ সেমি 8. 108 মি, 144 মি, 180 মি, 432 মি 9. $16\sqrt{3}$ বর্গ সেমি 10. প্রত্যেক গ্রাম থেকে 2 কিমি দূরে 11. 459 বর্গ মি 12. $AD = 234$ মি, $BC = 270$ মি 13. 8 সেমি 14. 6400টি 15. 484 বর্গ মি, 212·5 বর্গ মি 16. 30 সেমি 17. 1075 টাকা 18. 3023·75 বর্গ মি, 3045·00 টাকা 19. 437·5 বর্গ মি, 587·5 বর্গ মি 20. 346·5 বর্গ সেমি 21. 14 মিনিট 24 সেকেণ্ড 22. 1559·25 টাকা 23. 14 সেমি, 21 সেমি ; 16 : 5 : 4.

অনুশীলনী 4

1. 100·40 টাকা 2. 374·00 টাকা 3. 121·28 টাকা 4. 201·00 টাকা 5. 3 মি 6. 5·5 মি, 4·4 মি, 3·3 মি 7. 2·04 ঘন মি 8. 3500 ঘন মি, 14875·00 টাকা 9. 11টি 10. 850 কিলোলিটার 11. 1·1 মি 12. 150 মি 13. 200 গ্রাম 14. 13·75 ঘন মি 15. 135টি 16. 0·75 মি 17. 18 লিটার 18. দৈঃ 2·2 মি, প্রঃ 1·6 মি 19. 26·25 ঘন সেমি, 1·5 সেমি 20. 10000টি 21. 2 ডেসিমি 22. 2 মি, 1·5 মি, না, কারণ টবে মাত্র 1500 লিটার তেল ধরবে 23. 1 মি, 8 ডেসিমি 24. 2040টি 25. 6880 লিটার 26. 2 মিটার 27. 5 ডেসিমি, 258·50 টাকা 28. 7 ঘণ্টা 24 মিনিট, 5 ডেসিমি।

অনুশীলনী 5

1. 145·53 টাকা 2. 201·96 টাকা 3. 554·40 টাকা 4. 6 ডেসিমি 5. 6·4 ডেসিমি 6. 277·20 টাকা 7. 1386 ঘন সেমি 8. 3326·4 ঘন ডেসিমি

9. 14437·50 লিটার 10. 27·72 ঘন মিটার 11. 1232 ঘন ডেসিমি, 704 ঘন ডেসিমি, 352 ঘন ডেসিমি, 176 ঘন ডেসিমি 12. 1232 ঘন সেমি 13. 16টি 14. 1·5 কেজি 15. 325 গ্রাম 16. 13365 লিটার 17. 7700 লিটার 18. 7 সেমি 19. 2660 লিটার 20. 7 ঘণ্টা 21. 3·2 সেমি 22. 4·05 ডেসিমি 23. 1·4 মি 24. $\frac{2}{9}$ অংশ 25. 13 মিনিট 26. 2·1 মি 27. 200 মিটার 28. 3·08 ঘন মি, 0·84 ঘন মিটার 29. 302·4 ঘন ডেসিমি, 172·8 ঘন ডেসিমি 30. 13·86 ঘন ডেসিমি 31. 134·75 ঘন মি, 19·25 ঘন মি, 32. 41·58 ঘন ডেসিমি, 2 কুইন্টাল 7·9 কেজি 33. 277·2 ঘন ডেসিমি, 55·44 ঘন ডেসিমি 34. *(i)* 8·25 মি *(ii)* 9240 লিটার *(iii)* 18·48 লিটার 35. *(i)* $\frac{4}{15}$ *(ii)* 27720 লিটার *(iii)* 55440 লিটার।

অনুশীলনী 6

1. 264 বর্গ সেমি 2. 132 টাকা 3. 24 সেমি 4. 38·5 বর্গ মি 5. $427\frac{3}{7}$ বর্গ মি, 17 মি 6. 0·616 ঘন ডেসিমি 7. 1617 ঘন মি 8. 23·1 বর্গ মি, 12·936 ঘন মি 9. $37\frac{5}{7}$ ঘন মি, 4 মি 10. $4\frac{5}{7}$ ঘন সেমি 11. 2·4 কিমি 12. 3·5 ডেসিমি 14. 14 সেমি, 17·5 সেমি 15. 2849 ঘন ডেসিমি.

অনুশীলনী 7

1. 9·24 টাকা 2. 2·8 ডেসিমি 3. 10·5 সেমি 4. 38·808 ঘন সেমি, 55·44 বর্গ সেমি 5. 8টি 6. 8টি, 4·851 ঘন ডেসিমি 7. 41·58 টাকা 8. 36 : 25 9. 50·4 সেমি 10. 1·4 ডেসিমি 11. 8 সেমি 12. 2·1 ডেসিমি 14. 4টি 15. 12 ডেসিমি.

ত্রিকোণমিতি

ত্রিকোণমিতি

ত্রিকোণমিতি কি এবং কেন ঃ

আমরা জানি "Necessity is the mother of invention". প্রয়োজনের তাগিদ বড় তাগিদ। তাই গণিতের একটি বিশেষ শাখা ত্রিকোণমিতির জন্মের পিছনে প্রয়োজনের তাগিদ খুঁজলে বোধ হয় অন্যায় হবে না। কিন্তু কি সেই তাগিদ ?

প্রকৃতিতে মানুষ যা দেখতে পায় তার সব কিছুই সে যাচাই করে নিতে চায়, তা সে হাতের কাছের গাছপালা, ফলমূল, জীবজন্তু থেকে আরম্ভ করে দূর দিগন্তের সূর্য, চন্দ্র, গ্রহ-নক্ষত্র, দূরারোহ পর্বতশৃঙ্গ, বিস্তীর্ণ সমুদ্র, নদনদী



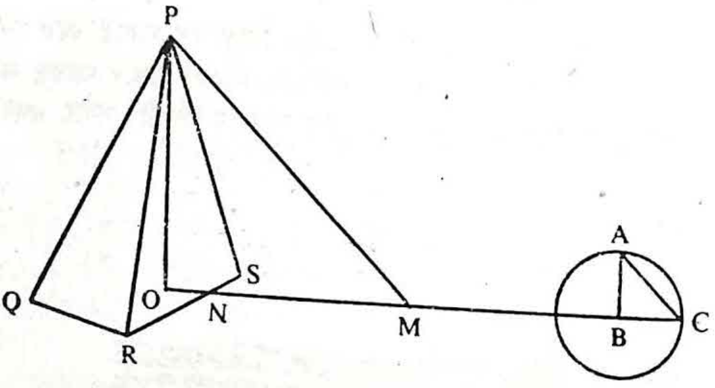
চিত্র নং ঃ 1

যাই হোক না কেন। এক সময় মানুষ তার হাতের কাছের সব জিনিস মাপতে শিখেছে, জ্যামিতির নানা চিত্রের সাহায্যে বিভিন্ন বস্তুর আকৃতি বুঝতে শিখেছে, পরিমাপ করতে শিখেছে তাদের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, বেধ ইত্যাদি। আবার তারই সাহায্যে সে হাতের নাগালের বাইরের জিনিস যেমন গ্রহ, নক্ষত্র, সূর্য-চন্দ্র ইত্যাদির আকার, আয়তন, দূরত্ব, ইত্যাদির পরিমাপ করার এবং তাদের গতিসূত্র জানার চেষ্টা চালিয়েছে অনবরত। সেই প্রচেষ্টার ফলে গণিতজ্ঞরা দূরারোহ পিরামিডের মাথায় না উঠেও কি করে মাটিতে দাঁড়িয়ে তার উচ্চতা নির্ণয় করেছিলেন তা 1 নং চিত্রে দেখ ঃ

বিষয়টির গাণিতিক ব্যাখ্যা নিচে দেওয়া হল।

নিচের চিত্রে দেখ $PQRS$ একটি পিরামিড। এর উচ্চতা নির্ণয় করতে হবে।

পিরামিড থেকে কিছু দূরে পিরামিডের ভূমির সমতলে AB একটি খুঁটি পোতা হল। B-কে কেন্দ্র করে AB-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে মাটিতে একটি বৃত্ত আঁকা হল।



চিত্র নং ঃ 2

সকালের দিকে যখন সূর্য উঠছে তখন দেখা যাবে, পিরামিড ও খুঁটি উভয়েরই লম্বা ছায়া পড়েছে। সূর্য যত উপরে উঠতে থাকবে ছায়াও তত ছোট হতে থাকবে। এক সময় দেখা যাবে AB খুঁটির ছায়ার অগ্রভাগ, অর্থাৎ A বিন্দুর ছায়া বৃত্তের উপর C বিন্দুর সঙ্গে মিলে যাবে আর সেই সময়ে পিরামিডের শীর্ষবিন্দু P-এর ছায়া M বিন্দুতে পড়েছে। এই M বিন্দুটি চিহ্নিত করে রাখা হল।

এখন M বিন্দু থেকে পিরামিডের ভূমির মধ্যবিন্দু O-এর দূরত্ব OM. যা তোমরা মাপতে পার। আবার $OM = OP$. সুতরাং OM-এর পরিমাপ করেই তোমরা পিরামিডের উচ্চতা পেতে পার।

তোমাদের জ্যামিতির জ্ঞান দিয়ে তোমরা নিজেরাই বিষয়টি বুঝতে পারবে। এখানে যে তত্ত্বটি প্রয়োগ করা হয়েছে তা হল সদৃশকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলির অনুপাতের সমতার তত্ত্ব যা তোমরা ইতোমধ্যে জ্যামিতির উপপাদ্য হিসাবে পড়েছ।

তোমরা জান বহুদূর থেকে আগত সূর্যরশ্মি কার্যত সমান্তরাল। সুতরাং $PM \parallel AC$; সুতরাং $\angle PMO =$ অনুরূপ $\angle ACB$.

সুতরাং সমকোণী ত্রিভুজ POM এবং সমকোণী ত্রিভুজ ABC সদৃশকোণী।

সমকোণী ত্রিভুজ ABC-তে $AB = BC$, কারণ AB-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্তটি আঁকা হয়েছে এবং BC বৃত্তের ব্যাসার্ধ ।

$$\text{সুতরাং } \frac{AB}{BC} = 1.$$

আবার যেহেতু ΔABC এবং ΔPMO সদৃশকোণী

$$\therefore \quad \frac{PO}{OM} = \frac{AB}{BC} = 1$$

$$\text{সুতরাং } PO = OM = ON + NM$$

তাহলে দেখতে পাচ্ছ, পিরামিডের চূড়ায় না উঠেও মাটিতে দাঁড়িয়ে পিরামিডের উচ্চতা নির্ণয় করা যায় । সেই প্রাচীনকালে থেলেস্ এই পদ্ধতিতে একটি লাঠি ও তার ছায়ার দৈর্ঘ্যের অনুপাতের সঙ্গে পিরামিড ও তার ছায়ার দৈর্ঘ্যের অনুপাতের সমতার বিষয়টির সাহায্যে পিরামিডের উচ্চতা নির্ণয় করেছিলেন ।

এই পদ্ধতির প্রধান অসুবিধা ছিল এই যে, দিনের বেলায় সূর্যের এক বিশেষ অবস্থানের জন্য অপেক্ষা করতে হতো । অবশ্য গ্রীক সভ্যতার যুগে গণিতের বিকাশ যে স্তরে ছিল, তাতে তখন জ্যামিতির এই বিশেষ তত্ত্বের প্রয়োগ করা ছাড়া অন্য উন্নততর উপায় জানা ছিল না ।

কিন্তু মানব সভ্যতার বিকাশের গতিপথে মানুষ যেমন একদিকে নানা অভিনব সমস্যার মুখোমুখি হয়েছে, তেমনি আবার মানুষই তার সমাধানের নতুন নতুন পথ আবিষ্কার করেছে, যেমন,

"সামনে খরস্রোতা একটি পাহাড়ী নদী । ফিতে নিয়ে নদীর ওপারে যাওয়ার কোনো উপায় নেই, অথচ নদীটি কত চওড়া তা নির্ণয় করতে হবে ।" গণিতের সাহায্যে মানুষ তা নির্ণয়ের পদ্ধতি আবিষ্কার করেছে ।

ইতোমধ্যে পণ্ডিতগণ বিভিন্ন প্রকারের ত্রিভুজ, তাদের কোণ ও বাহুগুলির মধ্যে সম্পর্ক সম্বন্ধে অনেক তত্ত্ব জেনে গেছেন । তাঁরা জেনেছেন যে, সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যে কোনো একটি নির্দিষ্ট মাপের সূক্ষ্মকোণের পরিপ্রেক্ষিতে তার বাহুগুলির অনুপাত একটি ধ্রুবক সংখ্যা । আর তারই সাহায্যে নদী পারাপার না করেও তাঁরা নদীটি কত চওড়া তা নির্ণয় করেছেন । কিভাবে তা করেছিলেন তার কৌশল তোমরা গণিতের এই বিশেষ শাখায় শিখবে ।

গণিতের এই বিশেষ শাখায় ত্রিভুজ বা ত্রিকোণের বাহু, কোণ, ক্ষেত্রফল ইত্যাদির পারস্পরিক সম্পর্ককে কাজে লাগানো হয় । তাই এই শাখাকে ত্রিকোণমিতি (Trigonometry) বলা হয় ।

জেনে রেখো প্রাচীন যুগের ভারতীয় গণিত বিশেষজ্ঞগণ গণিতের এই বিশেষ শাখাটি সম্পর্কে যথেষ্ট ওয়াকিবহাল ছিলেন । তাঁরা গণিতের অনেক দুরূহ প্রশ্ন সমাধানে এই বিষয়টি প্রয়োগ করেছেন ।

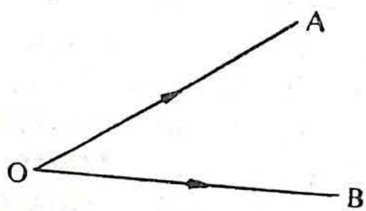
প্রথম অধ্যায়

কোণ পরিমাণ

যেহেতু 'ত্রিকোণমিতি' নামক গণিতের এই বিশেষ শাখা প্রধানত সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ দুটি পরিপ্রেক্ষিতে বাহুগুলির অনুপাতের উপর প্রতিষ্ঠিত তাই প্রথমেই কোণ সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা প্রয়োজন।

কোণ কাকে বলে ঃ

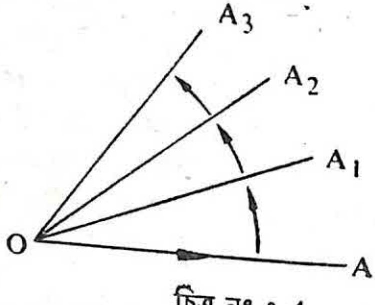
ষষ্ঠ শ্রেণীতে তোমরা জেনেছ *(i)* কোনো একটি বিন্দু থেকে যদি দুটি রশ্মি নির্গত হয় তবে সেই বিন্দুতে একটি কোণ উৎপন্ন হয়। যেমন, পাশের চিত্রে O বিন্দু থেকে OA ও OB রশ্মি দুটি নির্গত হওয়ায় $\angle AOB$ উৎপন্ন হয়েছে।



চিত্র নং ঃ 3

(ii) একটি রশ্মিকে যদি তার প্রান্তবিন্দুতে স্থির রেখে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘোরানো যায়, তবে সেই রেখা-রশ্মির প্রথম অবস্থানের সঙ্গে তার পরবর্তী প্রতিটি অবস্থান সেই প্রান্তবিন্দুতে এক একটি কোণ উৎপন্ন করে।

পাশের চিত্রে OA রশ্মিটিকে তার প্রান্তীয় O বিন্দুতে স্থির রেখে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরিয়ে OA_1, OA_2, OA_3 ইত্যাদি অবস্থান পাওয়া গেছে, ফলে O বিন্দুতে যথাক্রমে $\angle AOA_1$, $\angle AOA_2$, $\angle AOA_3$ ইত্যাদি বিভিন্ন কোণ উৎপন্ন হয়েছে।

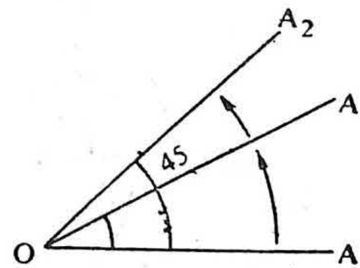


চিত্র নং ঃ 4

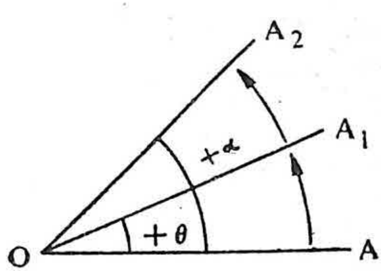
মন্তব্য ঃ জেনে রেখো $\angle A_1OA_2$, $\angle A_2OA_3$ ইত্যাদি কোণগুলির উৎপত্তিকে অনুরূপভাবে ব্যাখ্যা করা যায়।

জ্যামিতিক কোণ ও ত্রিকোণমিতিক কোণ :

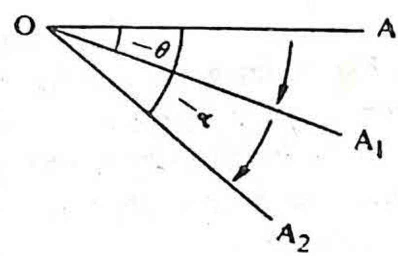
ঘূর্ণায়মান রশ্মির ঘূর্ণনের দিক ও তার ফলে সৃষ্ট কোণের পরিমাণ উভয়ই ত্রিকোণমিতির বিচার্য বিষয়। তা ছাড়াও ত্রিকোণমিতিতে কোণের ধারণা জ্যামিতির চেয়ে অনেক ব্যাপক ও বৈচিত্রপূর্ণ।



চিত্র নং : 5



চিত্র নং : 6 (i)



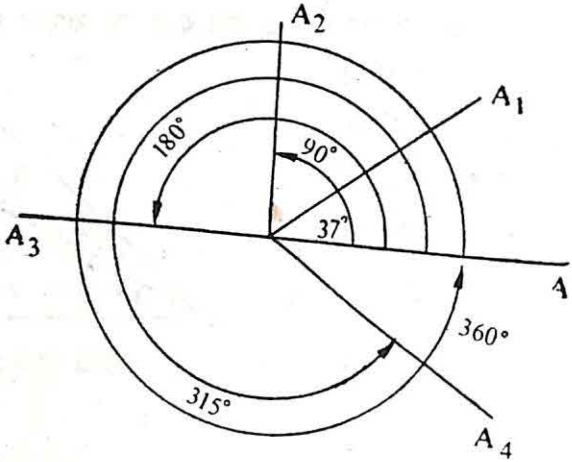
চিত্র নং : 6 (ii)

ত্রিকোণমিতিক কোণ

(1) উপরের চিত্রগুলি ও আলোচনা থেকে বুঝতে পারছ জ্যামিতিতে কোণের পরিমাণই মূল বিচার্য্য বিষয়।

কিন্তু ত্রিকোণমিতিতে কোণের পরিমাণ ও দিক দুইই বিচার করা হয়। ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরলে ধনাত্মক কোণ পাওয়া যায়, আর ঘূর্ণায়মান রেশ্মিটি যদি ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরে তবে ঋণাত্মক কোণ পাওয়া যায়। যেমন উপরের 6 *(i)* নং চিত্রে বাঁদিকে রশ্মিটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরেছে। তখন যে কোণ পাওয়া গেছে তাকে আমরা $+\theta, +\alpha$ ধরেছি। কিন্তু 6 *(ii)* নং চিত্রে রশ্মিটি ঘঁড়ির কাঁটার দিকে ঘুরেছে। তখন যে কোণ পাওয়া গেছে তাকে বলেছি $-\theta, -\alpha$।

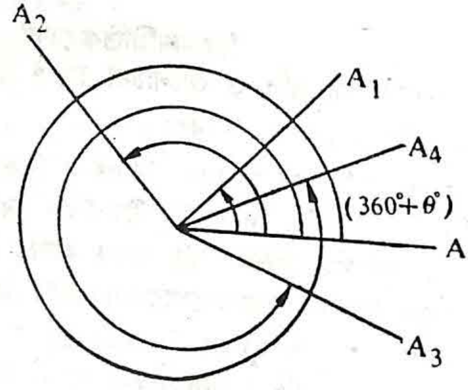
(2) জ্যামিতিক কোণ $0°$ থেকে $360°$ পর্যন্ত যেকোনো পরিমাণের হতে পারে, কিন্তু তার চেয়ে বড় হতে পারে না। অর্থাৎ, ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি এক পাক ঘুরে এসে মূল অবস্থানে মিশলে $360°$ কোণ উৎপন্ন হল।



চিত্র নং ঃ 7

কিন্তু এর পরে আবার ঘুরতে শুরু করলে নতুন করে 0° থেকে শুরু হয়ে কোণের পরিমাণ বাড়তে থাকবে।

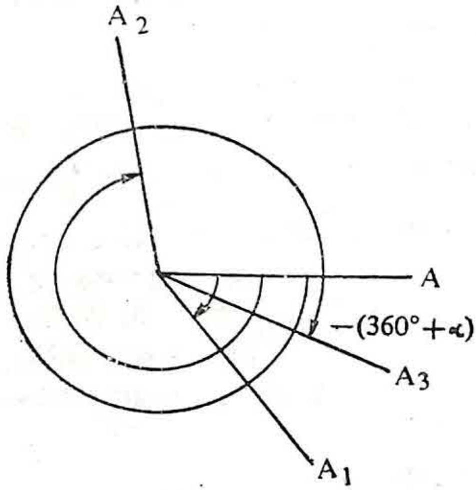
কিন্তু ত্রিকোণমিতিক কোণ 0° থেকে শুরু করে যেকোনো পরিমাণের হতে পারে। অর্থাৎ ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি যতবার পাক খাবে কোণের পরিমাণ তত 360° বেড়ে যাবে।



চিত্র নং ঃ 8

(8) নং চিত্রে দেখ ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি যখন OA_4 অবস্থানে এসেছে তখন (360° + θ°) কোণ উৎপন্ন করেছে। কিন্তু ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি যদি

দু'পাক ঘুরে আরও θ° কোণ উৎপন্ন করতো তবে সেই কোণের পরিমাণ হতো $(2 \times 360^\circ + \theta^\circ) = (720^\circ + \theta^\circ)$



চিত্র নং ঃ 9

আবার (8) নং চিত্রে দেখ ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি OA_3 অবস্থানে যাওয়ায় $(360^\circ + \alpha^\circ)$ কোণ উৎপন্ন হয়েছে।

কোণ পরিমাপের বিভিন্ন পদ্ধতি ও তাঁদের এককাবলী

ষষ্ঠিক পদ্ধতি ঃ

এই পদ্ধতিতে ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি পুরো এক পাক ঘুরে এলে যে কোণ উৎপন্ন হয় তাকে 360° ধরে তার চার ভাগের এক ভাগকে 90° বা এক সমকোণ ধরা হয়। এক সমকোণ বা 90° এর $\frac{1}{90}$ অংশকে 1° ধরা হয়। এই পদ্ধতিতে অন্যান্য নিম্ন এককগুলি হল মিনিট ও সেকেণ্ড।

এদের মধ্যে সম্পর্ক হল

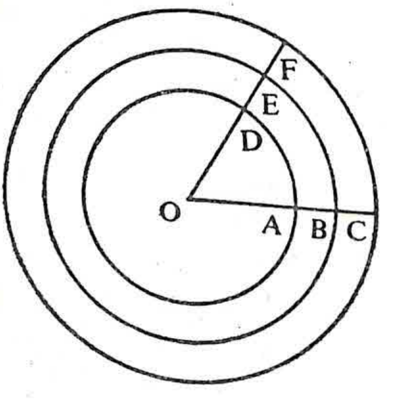
এক সমকোণ = 90° (ডিগ্রী)
1° (ডিগ্রী) = 60′ (মিনিট)
1′ (মিনিট) = 60″ (সেকেণ্ড)

বৃত্তীয় পদ্ধতি ঃ

বৃত্তের পরিধি ও বৃত্তের ব্যাসার্ধের মধ্যে যে ধ্রুবক সম্পর্কটি রয়েছে তার উপর ভিত্তি করেই এই পদ্ধতির একক নির্ধারিত হয়েছে।

পাশের চিত্রে তিনটি এক-কেন্দ্রীয় বৃত্ত রয়েছে।

সবচেয়ে ছোট বৃত্তটির বৃত্ত-পরিধি থেকে বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান দৈর্ঘ্যের একটি বৃত্তচাপ AD কেটে নেওয়া হল। এবার O, A এবং O, D যুক্ত করলে $\angle AOD$ পাওয়া যাবে, যা হল বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান দৈর্ঘ্যের চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ একটি কোণ।



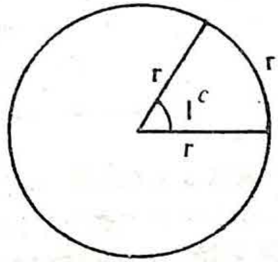
চিত্র নং ঃ 10

এবার OA এবং OD-কে বর্ধিত করলে তা অন্য দুটি বৃত্তকে যথাক্রমে B, C, এবং E, F বিন্দুতে ছেদ করবে। মেপে দেখ দুটি বৃত্তচাপ BE এবং CF এর দৈর্ঘ্য সংশ্লিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান ; অর্থাৎ $\angle BOE$ এবং $\angle COF$-ও

সংশ্লিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান দৈর্ঘ্যের চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণ।

এ থেকে এই সিদ্ধান্ত করা যায় যে, যেকোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট চাপ সব সময় কেন্দ্রে একটি নির্দিষ্ট পরিমাণের কোণ ধারণ করে।

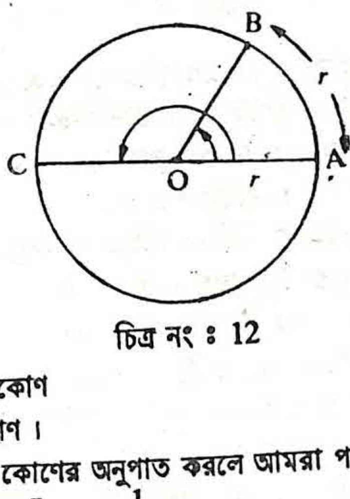
আর এই কোণের পরিমাণকেই বৃত্তীয় পদ্ধতিতে একক ধরা হয় এবং তাকে বলা হয় এক রেডিয়ান এবং তা লেখা হয় 1^c। 11 নং চিত্রে এক রেডিয়ান কোণের পরিমাণটি দেখ।



চিত্র নং ঃ 11

রেডিয়ান একটি ধ্রুবক কোণ ঃ

মনে কর, কোনো বৃত্তের কেন্দ্র O এবং তার ব্যাসার্ধ $OA = r$; OA ব্যাসার্ধের সমান দৈর্ঘ্যের একটি চাপ AB নিলে সংজ্ঞা অনুসারে $\angle AOB = 1$ রেডিয়ান। মনে কর, AO-এর বর্ধিতাংশ বৃত্তকে C বিন্দুতে ছেদ করেছে। তাহলে ABC চাপ বৃত্ত পরিধির অর্ধেক এবং সেই চাপ দ্বারা ধৃত



চিত্র নং ঃ 12

কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle AOC =$ এক সরল কোণ

= দুই সমকোণ।

এখন উপরের দুটি চাপ এবং দুটি কোণের অনুপাত করলে আমরা পাই

$$\frac{\text{চাপ } AB}{\text{চাপ } ABC} = \frac{r}{\frac{1}{2} \times 2\pi r} = \frac{1}{\pi}$$

এবং
$$\frac{\angle AOB}{\angle AOC} = \frac{1 \text{ রেডিয়ান}}{2 \text{ সমকোণ}}$$

কিন্তু জ্যামিতিতে দেখা যায় যে, কোন বৃত্তে বিভিন্ন চাপের দ্বারা ধৃত কেন্দ্রস্থ কোণগুলির অনুপাত সেই সব চাপের দৈর্ঘ্যের অনুপাতের সমান।

সুতরাং $\frac{\angle AOB}{\angle AOC} = \frac{\text{চাপ } AB}{\text{চাপ } ABC}$ বা, $\frac{1 \text{ রেডিয়ান}}{2 \text{ সমকোণ}} = \frac{1}{\pi}$

$\therefore$ 1 রেডিয়ান $= \frac{1}{\pi} \times 2$ সমকোণ $= \frac{2 \text{ সমকোণ}}{\pi}$ এবং এই মানটি একটি ধ্রুবক সংখ্যা, কারণ, 2 সমকোণ ও π উভয়েই ধ্রুবক।

$$1 \text{ রেডিয়ান} = \frac{2 \text{ সমকোণ}}{\pi}$$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ π রেডিয়ান $= 2$ সমকোণ $= 180°$

ষষ্ঠিক পদ্ধতির হিসাবমতো, 1 রেডিয়ান $= 57° \; 17' 44 \cdot 8''$ প্রায়।

পদ্ধতি দুটির এককাবলীর সম্পর্ক ঃ

ষষ্ঠিক পদ্ধতি	বৃত্তীয় পদ্ধতি
$360°$	$= 2\pi$ রেডিয়ান $= 2\pi^c$
$180°$	$= \pi$ রেডিয়ান $= \pi^c$
$90°$	$= \frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান $= \frac{\pi^c}{2}$

মন্তব্য ঃ (1) জেনে রাখ, ষষ্ঠিক পদ্ধতির কোণ বোঝানোর জন্য কোণের পরিমাণের উপরে '°' ডিগ্রীর চিহ্নটি ব্যবহার করা হয়, যেমন 60 ডিগ্রী = 60° আবার কোণ রেডিয়ানে বোঝানোর জন্য 'c' এই চিহ্নটি ব্যবহার করা হয় যেমন, 1 রেডিয়ান $= 1^c$.

(2) ত্রিকোণমিতিতে আমরা সাধারণত 1^c এমনভাবে কোণের পরিমাণ লিখি না। π ও তার অংশ দিয়ে তা প্রকাশ করি। π দিয়ে প্রকাশ করলে সাধারণত আমরা 'c' এই চিহ্নটি ব্যবহার করি না।

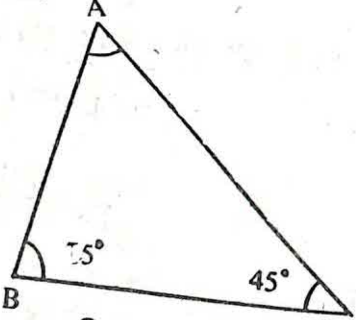
উদাহরণ **1.** একটি ত্রিভুজের দুটি কোণের ষষ্ঠিক মান যথাক্রমে 75° ও 45°; তৃতীয় কোণের বৃত্তীয় মান নির্ণয় কর।

ABC ত্রিভুজের $\angle ABC = 75°$ এবং $\angle ACB = 45°$,

$\therefore \angle BAC = 180° - (75° + 45°) = 180° - 120° = 60°$.

আবার $180° = \pi \; \therefore 60° = \frac{\pi}{3}$.

$\therefore ABC$ ত্রিভুজের $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$.



চিত্র ঃ 13

উদাহরণ 2. একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে দুই পাক ঘোরার পর 30° কোণ উৎপন্ন করেছে। ত্রিকোণমিতিক পরিমাপে কোণটির ষষ্ঠিক ও বৃত্তীয় মান কত হবে ?

যেহেতু রশ্মিটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরছে, তাই কোণটি ধণাত্মক কোণ হবে।

তোমরা জান, ঘূর্ণায়মান রশ্মি প্রতি এক পাক ঘুরলে 360° কোণ উৎপন্ন করে। সুতরাং দুই পাকে তা $360^\circ \times 2 = 720^\circ$ কোণ উৎপন্ন করবে। এখানে যেহেতু দুই পাকের পরও 30° কোণ উৎপন্ন করেছে। সুতরাং ষষ্ঠিক পদ্ধতিতে তার পরিমাণ হবে $720^\circ + 30^\circ = 750^\circ$

আবার $180^\circ = \pi$

$$\therefore 750^\circ = \frac{750}{180}\pi = 4\frac{1}{6}\pi$$

উদাহরণ 3. একটি বৃত্তের অসমান দৈর্ঘ্যের দুটি চাপ কেন্দ্রে যে কোণ ধারণ করে আছে, তাদের অনুপাত 5 : 3 এবং দ্বিতীয় কোণটির ষষ্ঠিক মান 45° ; প্রথম কোণটির ষষ্ঠিক মান এবং বৃত্তীয় মান নির্ণয় কর।

মনে করি, প্রথম কোণটির ষষ্ঠিক মান θ°

তোমরা জান, $\frac{\theta^\circ}{45^\circ} = \frac{5}{3}$; $\therefore \theta^\circ = \frac{5}{3} \times 45^\circ = 75^\circ$.

সুতরাং প্রথম কোণটির ষষ্ঠিক মান 75°

আবার জান $180^\circ = \pi$;

$$\therefore 75^\circ = \frac{75}{180}\pi = \frac{5}{12}\pi$$

সুতরাং প্রথম কোণটির বৃত্তীয় মান হবে $\frac{5}{12}\pi$

উদাহরণ 4. *ABC* একটি সমবাহু ত্রিভুজ যার *A* শীর্ষবিন্দু থেকে *BC* বাহুর মধ্যবিন্দু *D*-এর সংযোজক রেখাংশ *AD*; $\angle BAD$-এর বৃত্তীয় মান কত হবে ?

যেহেতু ΔABC সমবাহু ত্রিভুজ, তাই $\angle BAC = 60^\circ$.

আবার আমরা জানি, সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমা সংশ্লিষ্ট কোণের সমদ্বিখণ্ডক হয়। সুতরাং $\angle BAD = 30^\circ$.

$\therefore \angle BAD$-এর বৃত্তীয় মান হবে, $\frac{30}{180}\pi = \frac{1}{6}\pi$.

অনুশীলনী 1

1. ডিগ্রী, মিনিট ও সেকেণ্ডে প্রকাশ কর :

(i) 832′ (ii) 7312″ (iii) 375″ (iv) $27\frac{1}{12}^{\circ}$ (v) 72·04°

2. বৃত্তীয় মান নির্ণয় কর :

(i) 60° (ii) 135° (iii) –150° (iv) 27° (v) 22°30′ (vi) –67°30′ (vii) 52° 52′ 30″

3. একটি ত্রিভুজের একটি কোণ 65° এবং দ্বিতীয়টি $\frac{\pi}{12}$, তৃতীয় কোণটির ষষ্ঠিক ও বৃত্তীয় মান নির্ণয় কর।

4. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 7 সেমি। এই বৃত্তের 5·5 সেমি বৃত্তচাপ দ্বারা ধৃত কেন্দ্রীয় কোণটির বৃত্তীয় মান কত ?

5. দুটি কোণের সমষ্টি 135° এবং তাদের অন্তর $\frac{\pi}{12}$ হলে, কোণ দুটির ষষ্ঠিক ও বৃত্তীয় মান কত ?

6. একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি $-5\frac{1}{12}\pi$ কোণ উৎপন্ন করেছে। রশ্মিটি কতবার পূর্ণপাক ঘুরেছে এবং তার পরে আর কত ডিগ্রী কোণ উৎপন্ন করেছে এবং কোন দিকে ঘুরেছে ?

7. একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি OA-এর A বিন্দু A_1 অবস্থান যাওয়ার $\frac{1}{6}\pi$ কোণ উৎপন্ন হয়েছে। আবার একই দিকে A_2 অবস্থানে যাওয়ায় $\angle A_1OA_2 = 57^{\circ}$ হয়েছে। $\angle AOA_2$ এর ষষ্ঠিক ও বৃত্তীয় মান কত হবে ?

8. একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি OA ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে OA_1 অবস্থানে যাওয়ায় $\angle AOA_1 = 75^{\circ}$ হয়েছে। পরে রশ্মিটি ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরে OA_2 অবস্থানে যাওয়ায় $\angle AOA_2 = \frac{1}{12}\pi$ হয়েছে। $\angle A_1OA_2$ ষষ্ঠিক মান কত ?

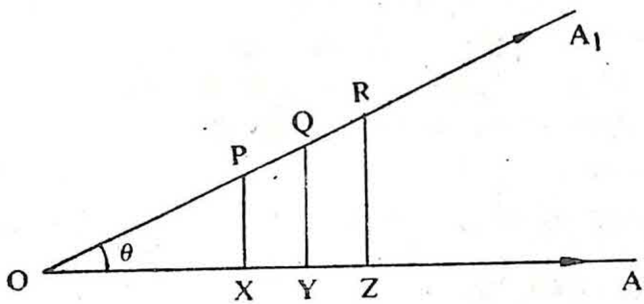
9. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত $\angle ABC = 45^{\circ}$ এবং এর $\angle ABC$-এর সমদ্বিখণ্ডক AC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে। $\angle ABD$, $\angle BAD$, $\angle CBD$ এবং $\angle BCD$-এর বৃত্তীয় মান নির্ণয় কর।

10. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ABC = 90^{\circ}$ এবং $\angle BAC = \frac{5}{8}\pi$ এবং B বিন্দু থেকে AC-এর উপর লম্ব AC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। ABD ও BCD ত্রিভুজ দুটির সমস্ত কোণের নাম উল্লেখ করে তাদের বৃত্তীয় মান লেখ।

11. সমবাহু ত্রিভুজ ABC-এর BC ভূমিকে E বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত কর, যেন $CE = BC$ হয়। A, E যুক্ত কর। এখন ACE ত্রিভুজের কোণগুলির নাম উল্লেখ করে তাদের বৃত্তীয় মান লেখ।

দ্বিতীয় অধ্যায়

কোণানুপাত



চিত্র নং ঃ 14

মনে কর, OA রশ্মি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে OA_1 অবস্থানে আসায় $\angle AOA_1 = \theta$ কোণ উৎপন্ন হয়েছে এবং θ কোণটি একটি সূক্ষ্মকোণ।

এবার কোণের OA_1 বাহুর উপর $P, Q, R\ldots$ ইত্যাদি যেকোনো সংখ্যক বিন্দু নিয়ে তা থেকে OA বাহুর উপর যথাক্রমে PX, QY, $RZ\ldots$ইত্যাদি লম্ব টানা হল। ফলে XOP, YOQ, ZOR ইত্যাদি যে সমকোণী ত্রিভুজগুলি পাওয়া গেল তারা পরস্পর সদৃশ। এবার সদৃশ ত্রিভুজের ধর্ম থেকে তোমরা জান ঃ

(i) $\frac{PX}{OP} = \frac{QY}{OQ} = \frac{RZ}{OR} = \ldots$ (ii) $\frac{OX}{OP} = \frac{OY}{OQ} = \frac{OZ}{OR} = \ldots$

(iii) $\frac{PX}{OX} = \frac{QY}{OY} = \frac{RZ}{OZ} = \ldots$ (iv) $\frac{OP}{PX} = \frac{OQ}{QY} = \frac{OR}{RZ} = \ldots$

(v) $\frac{OP}{OX} = \frac{OQ}{OY} = \frac{OR}{OZ} = \ldots$ (vi) $\frac{OX}{PX} = \frac{OY}{QY} = \frac{OZ}{RZ} = \ldots$

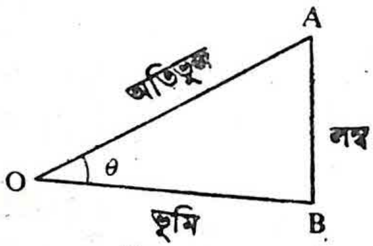
তাহলে দেখতে পাচ্ছ এক প্রস্থ সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজে কোনো একটি সূক্ষ্মকোণ সাপেক্ষে (i) $\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$ অনুপাতগুলি সমান; অনুরূপভাবে (ii) $\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$ (iii) $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$ প্রভৃতি অনুপাতগুলিও পরস্পর সমান। সুতরাং বলা যায় অনুপাতগুলির মান ত্রিভুজগুলির বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের উপর নির্ভরশীল নয়। অনুপাতগুলির মান সম্পূর্ণরূপে সূক্ষ্মকোণটির পরিমাণের উপর নির্ভরশীল।

যেহেতু ত্রিভুজগুলির প্রত্যেকটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং তাদের একটি সাধারণ কোণ θ একটি সূক্ষ্মকোণ, তাই এই ঘটনা ঘটেছে। সাধারণ সূক্ষ্মকোণ θ-এর মান যাই হোক না কেন প্রতিক্ষেত্রে অনুরূপ ফল পাওয়া যাবে।

তা হলেই দেখা যাচ্ছে সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজের যেকোনো একটি সাধারণ সূক্ষ্মকোণের পরিপ্রেক্ষিতে বাহুগুলির পারস্পরিক অনুপাতের একটি নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায়। এই সত্যের ওপরই ত্রিকোণমিতি প্রতিষ্ঠিত। আবার দেখেছ, ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দুটি-দুটি করে নিয়ে ছয় প্রকারের অনুপাত পাওয়া যায়। তাই এই ছয় প্রকারের অনুপাতকে আলাদাভাবে চিহ্নিত করার জন্য ত্রিকোণমিতিতে তাদের আলাদা আলাদা নাম দেওয়া হয়েছে। এই অনুপাতগুলিকে কোণানুপাত বলা হয়।

কোণানুপাত ও তাদের নাম ঃ

পাশের AOB ত্রিভুজে $\angle ABO$ = এক সমকোণ $\therefore OA$ = অতিভুজ এবং সূক্ষ্মকোণ $\angle AOB$-এর পরিপ্রেক্ষিতে OB = ভূমি এবং AB = লম্ব।



চিত্র ঃ 15

মনে করি $\angle AOB = \theta$

এখন, $\dfrac{AB}{OA} = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$ = Sineθ, যাকে সংক্ষেপে লিখি $\sin\theta$

$\dfrac{OB}{OA} = \dfrac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$ = Cosineθ, যাকে সংক্ষেপে লিখি $\cos\theta$

$\dfrac{AB}{OB} = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$ = Tangentθ, যাকে সংক্ষেপে লিখি $\tan\theta$

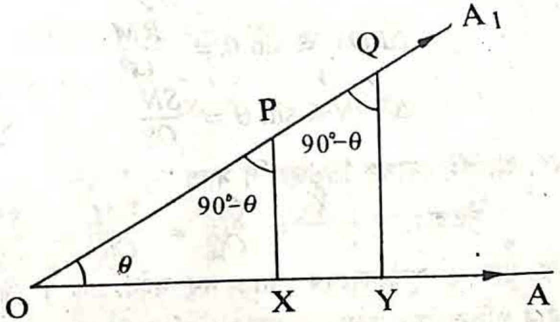
$\dfrac{OA}{AB} = \dfrac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}}$ = Cosecant θ, যাকে সংক্ষেপে লিখি $\operatorname{cosec}\theta$

$\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}}$ = Secant θ, যাকে সংক্ষেপে লিখি $\sec\theta$

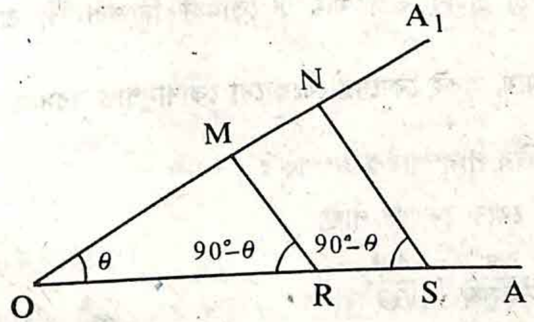
$\dfrac{OB}{AB} = \dfrac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}}$ = Cotangent θ, যাকে সংক্ষেপে লিখি $\cot\theta$

বিঃ দ্রঃ—বিশেষভাবে মনে রাখতে হবে যে আলোচ্য সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহুটিকে লম্ব ধরতে হবে এবং অতিভুজ ছাড়া অন্য বাহুটিকে ভূমি ধরতে হবে। আরও মনে রাখতে হবে যে, যেকোনো অনুপাতের মত এই অনুপাতগুলিও শুদ্ধ সংখ্যা, যার কোনো একক নেই।

এই অধ্যায়ের সূচনাতেই যে আলোচনাটি করা হয়েছে, তাতে তোমরা দেখেছ একই মাপের কোণের কোণানুপাত সব সময় সমান। এখানে আরও একটু নির্দিষ্ট করে তা দেখ।



চিত্র নং : 16 (i)



চিত্র নং : 16 (ii)

মনে কর, ঘূর্ণায়মান OA রশ্মি OA_1 অবস্থানে যাওয়ায় $\angle AOA_1 = \theta$ কোণ উৎপন্ন হয়েছে।

এখন 16(i) নং চিত্রে OA_1 বাহুর যেকোনো দুটি বিন্দু P ও Q থেকে OA বাহু উপর যথাক্রমে PX ও QY লম্ব টানা হয়েছে এবং 16(ii) নং চিত্রে OA বাহুর যেকোনো দুটি বিন্দু R ও S থেকে OA_1 বাহুর উপর যথাক্রমে RM ও SN লম্ব টানা হয়েছে।

যেহেতু POX, QOY, ROM এবং SON এই সমকোণী ত্রিভুজগুলির একটি সূক্ষ্মকোণ θ, সুতরাং অপর সূক্ষ্মকোণটি হবে $(90^\circ - \theta)$; সুতরাং ত্রিভুজগুলি সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজ।

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সংজ্ঞা অনুযায়ী

$$\Delta POX\text{-এ } \sin\theta = \frac{PX}{OP}$$

$$\Delta QOY\text{-এ } \sin\theta = \frac{QY}{OQ}$$

$$\Delta ROM\text{-এ } \sin\theta = \frac{RM}{OR}$$

$$\Delta SON\text{-এ } \sin\theta = \frac{SN}{OS}$$

কিন্তু তোমরা আগেই দেখেছ ত্রিভুজগুলি সদৃশ

$$\text{সুতরাং, } \frac{PX}{OP} = \frac{QY}{OQ} = \frac{RM}{OR} = \frac{SN}{OS}$$

সুতরাং বলা যায় θ সূক্ষ্মকোণের sine সব সময় এক। ত্রিভুজগুলির বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের পরিবর্তনের জন্য এর কোনো পরিবর্তন হয় না।

অনুরূপভাবে θ কোণের cosine, tangent ইত্যাদি সমস্ত কোণানুপাত নিয়েও এই সত্য প্রমাণ করা যায়। তোমরা নিজেরা তা অবশ্যই করে দেখবে।

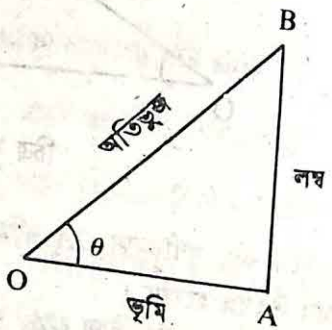
তাই বলা যায়, একই কোণের যেকোনো কোণানুপাত সবসময় সমান।

কোণানুপাতগুলির পারস্পরিক সম্পর্ক :

17 নং চিত্র থেকে দেখতে পাচ্ছ,

$$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AB}{BO}$$

এবং $\text{cosec}\,\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \frac{BO}{AB}$



চিত্র নং : 17

একটু লক্ষ করলেই দেখতে পাচ্ছ, কোণানুপাত দুটির একটি অন্যটির ব্যস্ত অনুপাতের সমান। তা থেকে বলা যায়,

$$\sin\theta = \frac{1}{\text{cosec}\,\theta} \text{ এবং } \text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad (i)$$

আবার, $\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{OA}{OB}$ এবং

$$\sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \frac{OB}{OA}$$

এখানেও একটি অন্যটির ব্যস্ত অনুপাতের সমান।

সুতরাং, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$ এবং $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$. (ii)

আবার, $\tan\theta = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \dfrac{AB}{OA}$ এবং $\cot\theta = \dfrac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \dfrac{OA}{AB}$.

এখানেও একটি অন্যটির ব্যস্ত অনুপাতের সমান।

সুতরাং, $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$ এবং $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$. (iii)

আবার দেখ, $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\frac{AB}{OB}}{\frac{OA}{OB}} = \dfrac{AB}{OB} \times \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{AB}{OA} = \tan\theta$;

সুতরাং, $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$. (iv)

আবার, $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\frac{OA}{OB}}{\frac{AB}{OB}} = \dfrac{OA}{OB} \times \dfrac{OB}{AB} = \dfrac{OA}{AB} = \cot\theta$,

সুতরাং, $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$. (v)

কোণানুপাতের ধর্ম :

মনে কর, $\sin\theta$-এর বর্গ নিতে হবে, অর্থাৎ $(\sin\theta)^2$ নিতে হবে। লেখার সুবিধার জন্য লেখা হয়, $(\sin\theta)^2 = \sin^2\theta$.

অনুরূপভাবে, $(\cos\theta)^2 = \cos^2\theta$, $(\tan\theta)^2 = \tan^2\theta$ ইত্যাদি।

কোণানুপাতগুলির পারস্পরিক সম্পর্কের আরও বিশদ আলোচনা

(1) 17 নং চিত্রের সমকোণী ত্রিভুজ AOB থেকে পাই,

$$AB^2 + OA^2 = OB^2.$$

এই সম্পর্কের উভয় পার্শ্বকে OB^2 দিয়ে ভাগ করলে পাই,

$$\frac{AB^2 + OA^2}{OB^2} = \frac{OB^2}{OB^2}$$

বা, $\left(\frac{AB}{OB}\right)^2 + \left(\frac{OA}{OB}\right)^2 = 1$

কিন্তু তোমরা জান, $\frac{AB}{OB} = \sin\theta$ এবং $\frac{OA}{OB} = \cos\theta$

সুতরাং, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (vi)

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\therefore \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$ (1)

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$\therefore \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$ (2)

(2) 17 নং চিত্রের সমকোণী ত্রিভুজ AOB থেকে পাই,

$$OB^2 = AB^2 + OA^2$$

এই সম্পর্কের উভয় পার্শ্বকে OA^2 দিয়ে ভাগ করলে পাই,

$$\frac{OB^2}{OA^2} = \frac{AB^2}{OA^2} + \frac{OA^2}{OA^2} = \frac{AB^2}{OA^2} + 1$$

$$\therefore \left(\frac{OB}{OA}\right)^2 = \left(\frac{AB}{OA}\right)^2 + 1$$

আবার তোমরা জান, $\frac{OB}{OA} = \sec\theta$

এবং $\frac{AB}{OA} = \tan\theta$

সুতরাং, $\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1$

$\therefore \sec\theta = \sqrt{\tan^2\theta + 1}$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$ (vii)

$\therefore \tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1}$

(3) আবার, $OB^2 = AB^2 + OA^2$ এই সম্পর্কের উভয় পার্শ্বকে AB^2 দিয়ে ভাগ করলে পাই,

$$\frac{OB^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} + \frac{OA^2}{AB^2} = 1 + \frac{OA^2}{AB^2}$$ । ঃ

$$\therefore \left(\frac{OB}{AB}\right)^2 = 1 + \left(\frac{OA}{AB}\right)^2$$

তোমরা জান, $\frac{OB}{AB} = \text{cosec}\,\theta$ এবং $\frac{OA}{AB} = \cot\theta$

সুতরাং, $\text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta = \cot^2\theta + 1$

$\therefore \text{cosec}\,\theta = \sqrt{\cot^2\theta + 1}$

(viii)

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $\cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta - 1$

$$\therefore \quad \cot \theta = \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \theta - 1}$$

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির পারস্পরিক সম্পর্কের বিস্তারিত আলোচনা থেকে দেখতে পাচ্ছ যে, কোনো একটি কোণের যেকোনো একটি কোণানুপাত দেওয়া থাকলে তা থেকে অন্যান্য কোণানুপাতগুলি নির্ণয় করা যায়। 22 পৃষ্ঠায় কোণানুপাতগুলির পারস্পরিক সম্পর্কের একটি ছক দেওয়া হল। তোমরা এই সম্পর্কগুলি বাড়িতে নির্ণয় করে দেখবে।

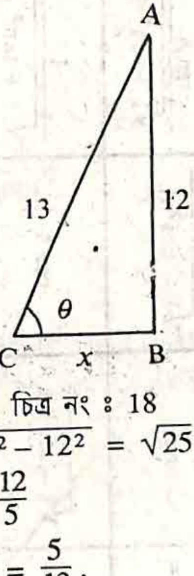
মন্তব্য ঃ কোনো অঙ্ক কষতে গিয়ে *(i)* থেকে *(viii)* পর্যন্ত মূল যে সম্পর্কগুলি পেয়েছ, সেগুলিই ব্যবহার করে অথবা সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে কোণানুপাতগুলি নির্ণয় করবে।

কোণানুপাতের পারস্পরিক সম্পর্কের ভিত্তিতে কিছু সমাধান ঃ

উদাহরণ **1.** একটি সমকোণী ত্রিভুজে θ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণের পরিপ্রেক্ষিতে $\sin \theta = \frac{12}{13}$ হলে, $\tan \theta$ এবং $\cos \theta$-এর মান কত হবে ?

প্রথম পদ্ধতি ঃ

18 নং চিত্র দেখ, প্রশ্নের শর্তানুযায়ী ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ACB = \theta$ এবং তার পরিপ্রেক্ষিতে আমরা ধরতে পারি, লম্ব $AB = 12$ এবং অতিভুজ $AC = 13$; কারণ, দেওয়া আছে $\sin \theta = \frac{12}{13}$.



চিত্র নং ঃ 18

$$\therefore \text{ ভূমি } BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\therefore \quad \tan \theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{5}$$

$$\text{এবং } \cos \theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{13},$$

$$\text{সুতরাং } \tan \theta = \frac{12}{5}$$

$$\text{এবং } \cos \theta = \frac{5}{13}.$$

কোণানুপাতগুলির পারস্পরিক সম্পর্ক

	sin A	cos A	tan A	cot A	sec A	cosec A
$\sin A =$	$\sin A$	$\sqrt{1-\cos^2 A}$	$\frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2 A-1}}{\sec A}$	$\frac{1}{\operatorname{cosec} A}$
$\cos A =$	$\sqrt{1-\sin^2 A}$	$\cos A$	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}}$	$\frac{\cot A}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$	$\frac{1}{\sec A}$	$\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A-1}}{\operatorname{cosec} A}$
$\tan A =$	$\frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A}$	$\tan A$	$\frac{1}{\cot A}$	$\sqrt{\sec^2 A-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A-1}}$
$\cot A =$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A}$	$\frac{\cos A}{\sqrt{1-\cos^2 A}}$	$\frac{1}{\tan A}$	$\cot A$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2 A-1}}$	$\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A-1}$
$\sec A =$	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$	$\frac{1}{\cos A}$	$\sqrt{1+\tan^2 A}$	$\frac{\sqrt{1+\cot^2 A}}{\cot A}$	$\sec A$	$\frac{\operatorname{cosec} A}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A-1}}$
$\operatorname{cosec} A =$	$\frac{1}{\sin A}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 A}}$	$\frac{\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}$	$\sqrt{1+\cot^2 A}$	$\frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A-1}}$	$\operatorname{cosec} A$

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{\frac{12}{13}}{\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}}$$

$$= \frac{12}{5}$$

আবার, $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$

কোণটি অবশ্যই সূক্ষ্মকোণ এবং ধনাত্মক হতে হবে।

উদাহরণ 2. যদি $\sin C = \frac{2}{5}$ হয়, তবে $\cos C \operatorname{cosec} C = ?$

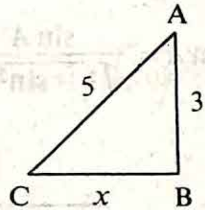
প্রথম পদ্ধতি ঃ

19 নং চিত্রের সমকোণী ত্রিভুজে $\angle C = \theta$,

এবং মনে করি, $AC = 5, AB = 3$

$\therefore CB = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

$\therefore \cos C.\ \operatorname{cosec} C = \frac{4}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$



চিত্র নং ঃ 19

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ

$$\cos C \operatorname{coscc} C = \sqrt{1-\sin^2 C} \cdot \frac{1}{\sin C}$$

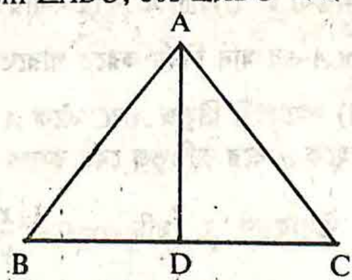
$$= \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} \cdot \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$$

উদাহরণ 3. ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার $AB = AC = 13$ সেমি এবং $BC = 10$ সেমি, এ থেকে $\sin\angle ABC, \cos\angle ABC$ এবং $\tan\angle ABC$-এর মান নির্ণয় কর।

20 নং চিত্রে ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে $AB = AC = 13$ সেমি এবং $BC = 10$ সেমি।

অঙ্কন ঃ A শীর্ষবিন্দু থেকে BC-এর উপর AD লম্ব টান।

$\therefore BD = \frac{1}{2}BC = 5$ সেমি



চিত্র নং ঃ 20

এখন ABD সমকোণী ত্রিভুজ থেকে পাই,

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} \text{ সেমি} = 12 \text{ সেমি}$$

আমরা জানি $\angle ABC = \angle ABD$,

$\therefore$ ABD সমকোণী ত্রিভুজ $\angle ABD$-এর পরিপ্রেক্ষিতে

$$\sin \angle ABD = \frac{AD}{AB} = \frac{12}{13} = \sin \angle ABC$$

$$\text{এবং } \cos \angle ABD = \frac{BD}{AB} = \frac{5}{13} = \cos \angle ABC$$

$$\text{এবং } \tan \angle ABD = \frac{AD}{BD} = \frac{12}{5} = \tan \angle ABC.$$

উদাহরণ 4. $\sin A = \frac{p}{q}$ হলে, $\tan A$, $\cot A$ ও $\sec A$-এর মান কত হবে ?

$$\tan A = \frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}} = \frac{\frac{p}{q}}{\sqrt{1-\frac{p^2}{q^2}}} = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{\sqrt{q^2-p^2}}{q}} = \frac{p}{\sqrt{q^2-p^2}}$$

$$\cot A = \frac{\sqrt{1-\text{si}^2 A}}{\sin A} = \frac{\sqrt{1-\frac{p^2}{q^2}}}{\frac{p}{q}} = \frac{\frac{\sqrt{q^2-p^2}}{q}}{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt{q^2-p^2}}{p}$$

$$\sec A = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{q^2}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{q^2-p^2}}{q}} = \frac{q}{\sqrt{q^2-p^2}}$$

[মন্তব্য ঃ (i) $\tan A$ নির্ণয় করার পর $\cot A = \frac{1}{\tan A}$ সূত্র ব্যবহার করেও $\cot A$-এর মান নির্ণয় করতে পারতে।

(ii) সমকোণী ত্রিভুজ ABC এঁকে A কোণের বিপরীত বাহুকে p এবং সংলগ্ন বাহুকে q ধরে অতিভুজ বের করেও করতে পারতে।]

উদাহরণ 5. যদি $\cot\theta = \frac{x}{y}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x\cos\theta - y\sin\theta}{x\cos\theta + y\sin\theta} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

বাম পক্ষ ঃ

$$\frac{x\cos\theta - y\sin\theta}{x\cos\theta + y\sin\theta} = \frac{x\cot\theta - y}{x\cot\theta + y}$$ (লব ও হরকে $\sin\theta$ দিয়ে ভাগ করে)

$$= \frac{x\cdot\frac{x}{y} - y}{x\cdot\frac{x}{y} + y}$$

$$= \frac{\frac{x^2 - y^2}{y}}{\frac{x^2 + y^2}{y}} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \text{ডানপক্ষ}$$

উদাহরণ 6. $\operatorname{Sin}\theta + \cos\theta = \frac{7}{5}$ এবং $\sin\theta\cos\theta = \frac{12}{25}$ হলে $\sin\theta - \cos\theta$ এর মান কত ?

$$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = (\sin\theta + \cos\theta)^2 - 4\sin\theta\cos\theta$$
$$= \left(\frac{7}{5}\right)^2 - 4\cdot\frac{12}{25}$$
$$= \frac{49}{25} - \frac{48}{25} = \frac{1}{25}$$

$$\therefore \operatorname{Sin} - \cos = \pm\sqrt{\frac{1}{25}} = \pm\frac{1}{5}$$

উদাহরণ 7. $1 + 2\sin\theta\cos\theta$-কে পূর্ণবর্গ রাশি হিসাবে প্রকাশ কর ঃ

$$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \sin^2 + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta,$$
$$= (\sin\theta + \cos\theta)^2$$

উদাহরণ 8. $\frac{\sec\theta + \tan\theta}{\sec\theta - \tan\theta} = 2\frac{51}{79}$ হলে, $\sin\theta$ -এর মান নির্ণয় কর।

$$\frac{\sec\theta + \tan\theta}{\sec\theta - \tan\theta} = 2\frac{51}{79}$$

বা, $$\frac{\sec\theta + \tan\theta}{\sec\theta - \tan\theta} = \frac{209}{79}$$

বা, $\frac{2\tan\theta}{2\sec\theta} = \frac{130}{288}$ [যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়া করে]

বা, $\frac{\tan\theta}{\sec\theta} = \frac{65}{144}$

$\therefore \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \cos\theta = \frac{65}{144}$

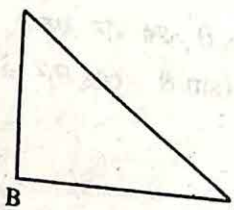
$\sin\theta = \frac{65}{144}$

উদাহরণ 9. *ABC* ত্রিভুজে ∠*B* সমকোণ। ওই ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্য $\sqrt{13}$ এবং অপর দুটি বাহুর সমষ্টি 5 হলে, $\sin C + \sin A$-এর মান নির্ণয় কর।

সমকোণী ত্রিভুজ *ABC*-এর অতিভুজ = *AC*. ∠*C* সাপেক্ষে *AB* লম্ব এবং ∠*A* সাপেক্ষে *BC* লম্ব।

$\therefore \sin C + \sin A = \frac{AB}{AC} + \frac{BC}{AC}$

$= \frac{AB + BC}{AC} = \frac{5}{\sqrt{13}}$.



চিত্র নং ঃ 21

বিকল্প প্রমাণ ঃ

মনে করি $AB = x$ $\therefore BC = 5 - x$

$\therefore x^2 + (5-x)^2 = (\sqrt{13})^2$

বা, $x^2 + 25 + x^2 - 10x = 13$

বা, $2x^2 - 10x + 12 = 0$

বা, $x^2 - 5x = 6 = 0$

বা, $(x-3)(x-2) = 0$

$\therefore x = 3$ অথবা 2

যদি $AB = 3$ হয়, তাহলে $BC = 5 - x = 2$

$\therefore \sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{\sqrt{13}}$ এবং $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{\sqrt{13}}$

$\therefore \sin C + \sin A = \frac{5}{\sqrt{13}}$.

আবার AB = 2 হলে BC = 3 হবে

তখন $\sin C = \frac{2}{\sqrt{13}}$ এবং $\sin A = \frac{3}{\sqrt{13}}$ হবে

$\therefore \sin C + \sin A = \frac{5}{\sqrt{13}}$

অনুশীলনী 2

1. ABC সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজ $AB = 10$ সেমি, ভূমি $BC = 8$ সেমি এবং লম্ব $AC = 6$ সেমি। এ থেকে $\angle ABC$-এর sine এবং tangent নির্ণয় কর।

2. একটি সমকোণী ত্রিভুজে যদি α একটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হয় এবং $\tan \alpha = \frac{15}{8}$ হয়, তবে $\sin \alpha$ এবং $\sec \alpha$ কত হবে?

3. দেওয়া আছে $\cot A = \frac{4}{7 \cdot 5}$; এ থেকে cos A এবং cosec A-এর মান নির্ণয় কর।

4. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের $AB = AC = 10$ সেমি এবং $BC = 16$ সেমি হলে, $\tan \angle ACB$ এবং cosec $\angle ACB$-এর মান কত?

5. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি $BC = 10$ সেমি এবং সমান দুই বাহুর অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের দৈর্ঘ্য 12 সেমি হলে, ভূমিসংলগ্ন যেকোনো একটি কোণের sine, cosine এবং tangent-এর মান নির্ণয় কর।

6. $\sin \theta = \frac{3}{5}$ হলে, $\frac{\operatorname{cosec} \theta}{1 + \cot \theta} = ?$

7. যদি $\tan \theta = \frac{8}{15}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\sqrt{\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}} = \frac{3}{5}$

8. (i) $\sec \theta + \tan \theta = 2$ হলে, $\sec \theta - \tan \theta$ -এর মান কত?

(ii) $\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta = \sqrt{2} - 1$ হলে, $\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta$ -এর মান কত?

(iii) $\sin \theta + \cos \theta = 1$ হলে, $\sin \theta \cos \theta$ -এর মান কত?

(iv) $\tan \theta + \cot \theta = 2$ হলে, $\tan \theta - \cot \theta$ -এর মান কত?

(v) $\sin \theta - \cos \theta = \frac{7}{13}$ হলে, $\sin \theta + \cos \theta$ -এর মান কত?

(vi) $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$ হলে, $\sin \theta - \cos \theta$ -এর মান কত?

(vii) $\sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে, $\sec\theta$ এবং $\tan\theta$ -এর মান নির্ণয় কর।

(viii) $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \sqrt{3}$ হলে, $\operatorname{cosec}\theta$ এবং $\cot\theta$ -এর মান নির্ণয় কর।

(ix) $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta} = 7$ হলে, $\tan\theta$ -এর মান কত ?

(x) $\frac{\operatorname{cosec}\theta + \sin\theta}{\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta} = \frac{5}{3}$ হলে, $\sin\theta$ -এর মান কত ?

(xi) $\sec\theta + \cos\theta = \frac{5}{2}$ হলে, $\sec\theta - \cos\theta$ -এর মান কত ?

(xii) $\sin^2\theta + \cos^2\theta$ -এর মান কত ? সেই মান ব্যবহার করে $5\sin^2\theta + 4\cos^2\theta = \frac{9}{2}$ সম্পর্কটি থেকে $\tan\theta$ -এর মান নির্ণয় কর।

(xiii) $\tan^2\theta + \cot^2\theta = \frac{10}{3}$ হলে, $\tan\theta + \cot\theta$ এবং $\tan\theta - \cot\theta$ -এর মান নির্ণয় কর। এ থেকে $\tan\theta$ -এর মান নির্ণয় কর।

(xiv) $\sec^2\theta + \tan^2\theta = \frac{13}{12}$ হলে, $\sec^4\theta - \tan^4\theta$ -এর মান কত ?

(xv) PQR ত্রিভুজে $\angle Q$ সমকোণ। $PR = \sqrt{5}$ এবং $PQ - RQ = 1$ হলে, $\cos P - \cos R$ -এর মান নির্ণয় কর।

(xvi) XYZ ত্রিভুজে $\angle Y$ সমকোণ। $XY = 2\sqrt{3}$ এবং $XZ - YZ = 2$ হলে, $\sec X - \tan X$-এর মান নির্ণয় কর।

9. যদি $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\tan\alpha + \sec\alpha = 1{\cdot}5$.

10. যদি $\tan A = \frac{n}{m}$ হয়, তবে $\sin A$ ও $\sec A$-এর মান নির্ণয় কর।

11. যদি $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $x\sin\theta = y\cos\theta$.

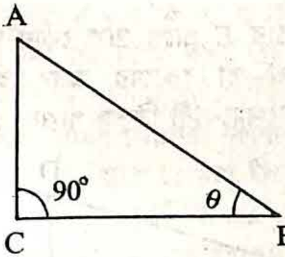
12. যদি $\sin\alpha = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\cot\alpha = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$.

এই প্রশ্নমালায় প্রদত্ত ও নির্ণেয় কোণানুপাতগুলির ক্ষেত্রে সংশ্লিষ্ট কোণের প্রতিটি সূক্ষ্মকোণ।

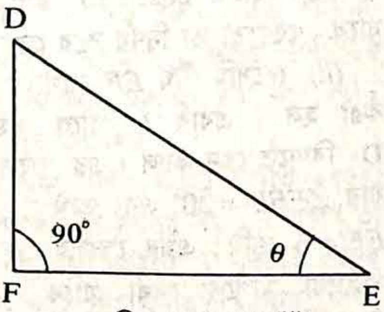
বিভিন্ন কোণের কোণানুপাতের মান ঃ

আগের অধ্যায়ে তোমরা দেখেছ, দুই বা ততোধিক সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য যাই হোক না কেন তাদের যেকোনো একটি অনুরূপ সূক্ষ্মকোণের পরিপ্রেক্ষিতে কোণানুপাতের মান অপরিবর্তিত থাকে।

নিচে ΔABC এবং ΔDEF দুটি সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজ, যাঁদের $\angle ABC = \angle DEF = \theta^\circ$.



চিত্র নং ঃ 22 (i)



চিত্র নং ঃ 22 (ii)

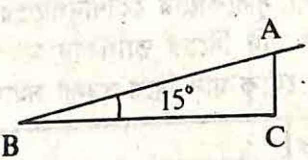
লক্ষ করলেই দেখতে পাচ্ছ তাদের বাহুগুলি সমান নয়। কিন্তু তোমরা জান $\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$ অর্থাৎ $\sin \angle ABC = \sin \angle DEF = \sin \theta$

এবং $\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$ অর্থাৎ $\tan \angle ABC = \tan \angle DEF = \tan \theta$

অনুরূপভাবে অন্যান্য কোণানুপাতগুলির সমতাও দেখানো যায়।

এ থেকে বোঝা যায় যে, জ্যামিতিক অঙ্কনের সাহায্যে একটি সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যে যেকোনো পরিমাণের সূক্ষ্মকোণ নিয়ে তার কোণানুপাতগুলির মান নির্ণয় করা যায়। যেমন,

(i) 5 cm দীর্ঘ BC রেখাংশ নিয়ে তার B প্রান্তে একটি 15° কোণ আঁকা হল। এবার C প্রান্তে লম্ব টানলে তা কোণের অপর বাহুকে A বিন্দুতে ছেদ করে। এর ফলে ABC সমকোণী ত্রিভুজ পাওয়া গেল, যার $\angle CAB = 15^\circ$ এবং ভূমি $BC = 5$ সেমি; এখন স্কেলের সাহায্যে মাপলে দেখা যাবে $AB = 5{\cdot}2$ সেমি (প্রায়) এবং $AC = 1{\cdot}3$ সেমি (প্রায়)।



চিত্র নং ঃ 23

তখন তা থেকে পাওয়া যাবে,

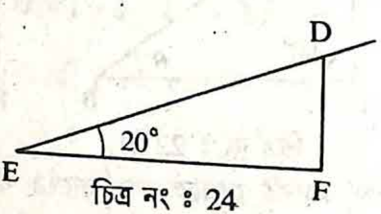
$\sin \angle ABC = \sin 15^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{1\cdot3 \text{ সেমি}}{5\cdot2 \text{ সেমি}}$ (প্রায়) $= 0\cdot25$ (প্রায়)

$\cos \angle ABC = \cos 15^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{5 \text{ সেমি}}{5\cdot2 \text{ সেমি}}$ মি (প্রায়) $= 0\cdot96$ (প্রায়)

$\tan \angle ABC = \tan 15^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{1\cdot5 \text{ সেমি}}{5 \text{ সেমি}}$ (প্রায়) $= 0\cdot26$ (প্রায়)

অনুরূপভাবে, cosec 15°, sec 15° ও cot 15° এর মান নির্ণয় করা যাবে। তোমরা তা নির্ণয় করে দেখ।

(ii) 6 সেমি দীর্ঘ *EF* রেখাংশ নিয়ে তার *E* প্রান্তে 20° কোণ অঙ্কন করা হল। এবার *F* প্রান্তে লম্ব টানলে তা কোণের অপর বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করল। এর ফলে *DEF* সমকোণী ত্রিভুজ পাওয়া গেল, যার $\angle FED = 20^\circ$ এবং ভূমি $EF = 6$ সেমি; এখন স্কেলের সাহায্যে মাপলে দেখা যাবে $DE = 6\cdot5$ সেমি প্রায় এবং $DF = 2\cdot2$ সেমি প্রায়।



চিত্র নং ঃ 24

তখন তা থেকে পাওয়া যাবে,

$\sin \angle FED = \sin 20^\circ = \frac{DF}{DE} = \frac{2\cdot2 \text{ সেমি}}{6\cdot4 \text{ সেমি}}$ (প্রায়) $= 0\cdot34$ (প্রায়)

$\cos \angle FED = \cos 20^\circ = \frac{EF}{DE} = \frac{6 \text{ সেমি}}{6\cdot4 \text{ সেমি}}$ (প্রায়) $= 0\cdot94$ (প্রায়)

$\tan \angle FED = \tan 20^\circ = \frac{DF}{EF} = \frac{2\cdot2 \text{ সেমি}}{6 \text{ সেমি}}$ (প্রায়) $= 0\cdot37$ (প্রায়)

অনুরূপভাবে, cosec 20°, sec 20°, ও cot 20°-এর মান নির্ণয় করা যাবে। তোমরা তা করে দেখবে।

তাহলে দেখা যাচ্ছে, জ্যামিতিক অঙ্কন ও পরিমাপের সাহায্যে আমরা যেকোনো সূক্ষ্মকোণের কোণানুপাতের মান নির্ণয় করতে পারি। তখন সেই সব মান যদি নিচের তালিকার মত লিখে রাখা যায়, তবে প্রয়োজনে সেই তালিকা থেকে মান নিয়ে সমস্যা সমাধান করা যাবে।

কোণের	কোণানুপাত					
পরিমাণ	sin	cos	tan	cosec	sec	cot
15°	0·25 (প্রায়)	0·96(প্রায়)	0·26 (প্রায়)	4·0 (প্রায়)	1·04 (প্রায়)	3·85 (প্রায়)
20°	0·34 (প্রায়)	0·94(প্রায়)	0·37 (প্রায়)	2·94 (প্রায়)	1·06 (প্রায়)	2·70 (প্রায়)

এমনিভাবে, তোমরা বিভিন্ন সূক্ষ্মকোণ নিয়ে জ্যামিতিক পরিমাপের সাহায্যে তাদের কোণানুপাতের মান নির্ণয় করে তার একটি তালিকা তৈরি করার চেষ্টা করবে।

প্রাচীনকাল থেকেই গণিত বিশেষজ্ঞগণ বিভিন্ন কোণের কোণানুপাতের মান নির্ণয় করে তা তালিকাবদ্ধ করে আসছেন। বর্তমানে 0° থেকে 90° পর্যন্ত সমস্ত কোণের কোণানুপাতের মানের তালিকা পাওয়া যায়। তোমরা বড় হয়ে যখন জটিলতর সমস্যা সমাধান করবে তখন সেই তালিকা ব্যবহার করবে।

কিন্তু 0° থেকে 90°-এর মধ্যে এমন কয়েকটি কোণ আছে যাদের কোণানুপাতের মান কোনো প্রকার মাপজোখের ঝামেলা না করেই জ্যামিতিক তত্ত্বের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়। সেই কোণগুলি হল 0°, 30°, 45°, 60°, 90° এবং ত্রিকোণমিতিতে এদের আদর্শকোণ বলা হয়।

নিচে আদর্শ-কোণের কোণানুপাতের মান নির্ণয় করার পদ্ধতি দেওয়া হল। বর্তমান স্তরে তোমরা ত্রিকোণমিতির যে-সব সমস্যা সমাধান করবে তা কেবল এইসব আদর্শ-কোণের মধ্যেই সীমাবদ্ধ থাকবে। সুতরাং এদের কোণানুপাতের মান নির্ণয়ের পদ্ধতি জানা খুবই প্রয়োজনীয়। আবার বিশেষ বিশেষ সমস্যায় এইসব মান যাতে সহজেই এবং দ্রুত ব্যবহার করতে পার তার জন্য বারবার অনুশীলন করে এবং পড়ে এদের মুখস্থ করে রাখবে।

কয়েকটি আদর্শ-কোণের কোণানুপাতের মান :

আগেই বলা হয়েছে ত্রিকোণমিতিতে 0°, 30°, 45°, 60°, 90° কোণগুলিকে আদর্শ-কোণ বলা হয়, কারণ সাধারণ জ্যামিতিক পদ্ধতিতেই এদের কোণানুপাতের মান নির্ণয় করা যায়। নিচে পদ্ধতিগুলি দেওয়া হল।

45° কোণের কোণানুপাতের মান :

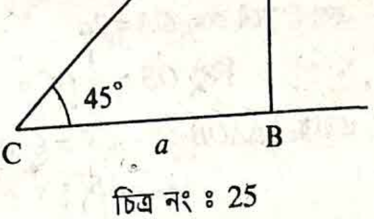
25নং চিত্রের ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle BAC = 45°$; এই কোণের কোণানুপাতগুলির মান নির্ণয় করতে হবে।

যেহেতু $\angle BAC = 45°$

$\therefore \quad \angle CAB = 45°$

সুতরাং, $CB = AB$;

এখন মনে কর, $CB = AB = a$



চিত্র নং : 25

তোমরা জান $CA^2 = CB^2 + AB^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$\therefore \quad CA = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$

সুতরাং, অতিভুজ $CA = a\sqrt{2}$, লম্ব $AB = a$ এবং ভূমি $CB = a$

সুতরাং, $\sin 45^\circ = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\operatorname{cosec} 45^\circ = \dfrac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$

$\cos 45^\circ = \dfrac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

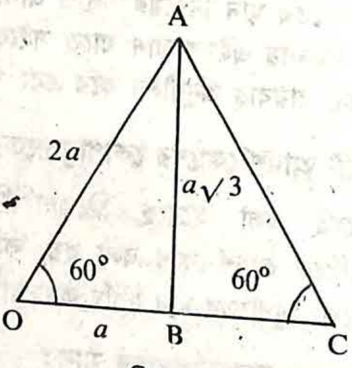
$\sec 45^\circ = \dfrac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$

$\tan 45^\circ = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \dfrac{a}{a} = 1$

$\cot 45^\circ = \dfrac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \dfrac{a}{a} = 1$

60° কোণের কোণানুপাতের মান ঃ

26 নং চিত্রের AOB সমকোণী ত্রিভুজে $\angle BOA = 60^\circ$; এই কোণের কোণানুপাতগুলির মান নির্ণয় করতে হবে।



চিত্র নং ঃ 26

অঙ্কন ঃ OB-কে C বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যেন $OB = BC$ হয়। A, C যুক্ত করা হল। এখন ΔAOB এবং ΔABC-এর মধ্যে $OB = BC$, AB সাধারণ এবং অন্তর্ভূত $\angle ABO =$ অন্তর্ভূত $\angle ABC$ (উভয়েই সমকোণ)

$\therefore$ ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

সুতরাং, $\angle BOA = 60^\circ = \angle ACB$

এবং ΔAOC একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

এবার, মনে কর, $OA = 2a$ $\quad \therefore \quad OC = 2a$

কিন্তু $OB = \dfrac{1}{2} OC = \dfrac{1}{2} \times 2a = a$

এবার, ΔAOB-তে $AB^2 = OA^2 - OB^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$

$\therefore \quad AB = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}.$

তাহলে, ΔAOB-তে $\angle AOB$-এর পরিপ্রেক্ষিতে
অতিভুজ $OA = 2a$, লম্ব $AB = a\sqrt{3}$ এবং ভূমি $OB = a$

$$\text{সুতরাং,}\quad \sin 60^\circ = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \frac{2a}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\sec 60^\circ = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \frac{2a}{a} = 2$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

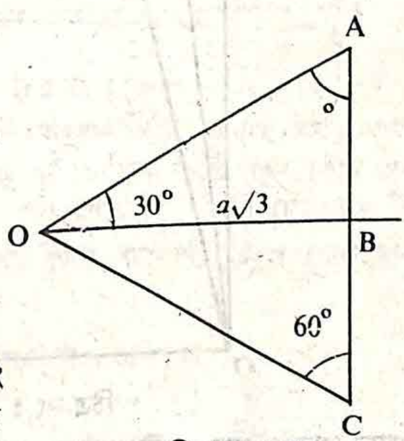
$$\cot 60^\circ = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

30° কোণের কোণানুপাতের মান ঃ

27নং চিত্রের AOB সমকোণী ত্রিভুজে $\angle BOA = 30^\circ$; এই কোণের কোণানুপাতগুলির মান নির্ণয় করতে হবে।

অঙ্কন ঃ AB-কে C বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যেন $AB = BC$ হয়। O, C যুক্ত করা হল।

এখন ΔAOB এবং ΔBOC-এর মধ্যে $AB = BC$ এবং OB সাধারণ এবং অন্তর্ভূত $\angle ABO$ = অন্তর্ভূত $\angle CBO$ (উভয়েই সমকোণ)



চিত্র নং ঃ 27

$\therefore$ ত্রিভুজ দুটি সর্বসম। সুতরাং, $\angle OAB = 60^\circ = \angle OCB$
এবং ΔAOC একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

এবার, মনে কর, $OA = 2a$ $\quad\therefore\quad AC = 2a$

$$\text{কিন্তু } AB = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 2a = a$$

এবার, ΔAOB-তে $OB^2 = OA^2 - AB^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$

$$\therefore\quad OB = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}.$$

তাহলে, ΔAOB-তে $\angle AOB$-এর পরিপ্রেক্ষিতে

অতিভুজ $OA = 2a$, লম্ব $AB = a$ এবং ভূমি $OB = a\sqrt{3}$

সুতরাং, $\sin 30^\circ = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$

$$\text{cosec } 30^\circ = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \frac{2a}{a} = 2$$

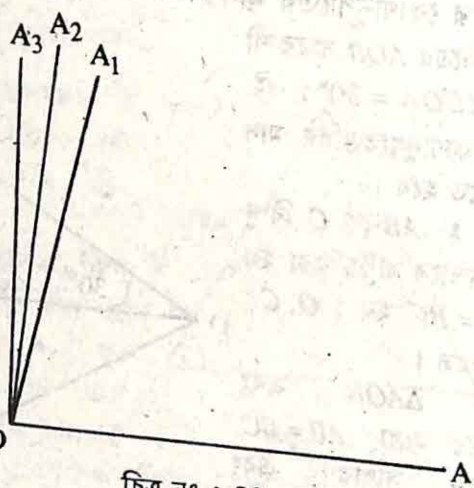
$$\cos 30^\circ = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sec 30^\circ = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \frac{2a}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}.$$

90° কোণের কোণানুপাতের মান ঃ



চিত্র নং ঃ 28

এখানে আমরা এমন একটি অবস্থার কথা ভাবছি যখন ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি
একটি সমকোণ অর্থাৎ 90° কোণ উৎপন্ন করবে, এবং তার যেকোনো একটি
বিন্দু থেকে মূল বাহুর উপর লম্ব টেনে একটি সমকোণী ত্রিভুজ পাওয়া
যাবে। উপরের চিত্রে দেখতে পাচ্ছ, ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি যতই 90°-এর
কাছাকাছি যাচ্ছে ততই তা থেকে অঙ্কিত লম্ব সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের
সঙ্গে মিলে যাচ্ছে এবং ত্রিভুজটির ভূমির দৈর্ঘ্য কমে যাচ্ছে। এ অবস্থায়
ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি যখন ঠিক 90° কোণ উৎপন্ন করবে তখন যে অবস্থাটি
হবে তা হল, লম্ব = অতিভুজ এবং ভূমি $= 0$;

$$\text{সুতরাং,} \quad \sin 90^\circ = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{লম্ব}} = 1$$

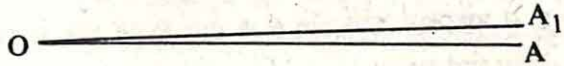
$$\operatorname{cosec} 90^\circ = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{লম্ব}} = 1$$

$$\cos 90^\circ = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{0}{\text{অতিভুজ}} = 0$$

$$\cot 90^\circ = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \frac{0}{\text{লম্ব}} = 0.$$

মন্তব্য : $\sec 90^\circ$ ও $\tan 90^\circ$-এর মান অসংজ্ঞাত।

0° কোণের কোণানুপাতের মান :



চিত্র নং : 29

এখানে আমরা এমন একটি অবস্থার কথা ভাবছি যখন ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি যাত্রা শুরু করেছে, কিন্তু মূল অবস্থান ছেড়ে নতুন কোন অবস্থানে যায় নি। এ অবস্থায় আমরা বলি ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি 0° কোণ উৎপন্ন করেছে। এ অবস্থায় একটি লম্ব টেনে সমকোণী ত্রিভুজ পেলে যা হবে তা হল,

$$\text{লম্ব} = 0 \text{ এবং ভূমি} = \text{অতিভুজ}$$

$$\text{সুতরাং,} \quad \sin 0^\circ = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{0}{\text{অতিভুজ}} = 0$$

$$\cos 0^\circ = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{\text{ভূমি}}{\text{ভূমি}} = 1$$

$$\sec 0^\circ = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \frac{\text{ভূমি}}{\text{ভূমি}} = 1$$

$$\tan 0^\circ = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{0}{\text{ভূমি}} = 0.$$

মন্তব্য : $\operatorname{cosec} 0^\circ$ এবং $\cot 0^\circ$-এর মান অসংজ্ঞাত।

আদর্শ কোণের কোণানুপাতের মানের তালিকা ঃ

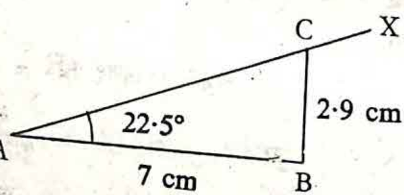
কোণানু-পাত	0° বা 0°	30° বা $\frac{\pi}{6}$	45° বা $\frac{\pi}{4}$	60° বা $\frac{\pi}{3}$	90° বা $\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	অসংজ্ঞাত
cosec	অসংজ্ঞাত	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	অসংজ্ঞাত
cot	অসংজ্ঞাত	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

মন্তব্য ঃ θ সূক্ষ্মকোণ হলে, $\sin\theta$ ও $\cos\theta$-এর মান 0 থেকে 1-এর মধ্যে হবে (উভয় মাণ সহ)।

উদাহরণ 1. AB রেখাংশের A প্রান্তে $\angle BAX = 22^{\cdot}5^\circ$ অঙ্কন করা হল এবং B প্রান্তে একটি লম্ব অঙ্কন করা হল যা AX-কে C বিন্দুতে ছেদ করে। এখন যদি $AB = 7$ সেমি এবং $BC = 2^{\cdot}9$ সেমি হয়, তবে এ থেকে $22^{\cdot}5^\circ$ এবং $67^{\cdot}5^\circ$ কোণের sine, cosine ও tangent-এর মান নির্ণয় কর। (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান)।

30 নং চিত্রের ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle BAC = 22^{\cdot}5^\circ$

$\therefore \angle BAC = (90^\circ - 22^{\cdot}5^\circ)$
$= 67^{\cdot}5^\circ$



চিত্র নং ঃ 30

এবার সমকোণী ত্রিভুজ ABC থেকে পাই,

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{7 + 2^{\cdot}9^2} = 7^{\cdot}6 \text{ (প্রায়)}$$

$\therefore$ $AB = 7$ সেমি $AC = 7^{\cdot}6$ সেমি এবং $BC = 2^{\cdot}9$ সেমি.

এবার, $\angle BAC = 22^{\cdot}5^\circ$-এর পরিপ্রেক্ষিতে

$AB =$ ভূমি, $BC =$ লম্ব এবং $AC =$ অতিভুজ

আবার, $\angle BCA = 67^{\cdot}5^\circ$-এর পরিপ্রেক্ষিতে

BC = ভূমি, AB = লম্ব এবং AC = অতিভুজ

সুতরাং $\sin 22^{\cdot}5^\circ = \frac{2^{\cdot}9 \text{ সেমি}}{7^{\cdot}6 \text{ সেমি}}$ (প্রায়) = $0^{\cdot}38$ (প্রায়)

$\sin 67^{\cdot}5^\circ = \frac{7 \text{ সেমি}}{7^{\cdot}6 \text{ সেমি}}$ (প্রায়) = $0^{\cdot}92$ (প্রায়)

$\cos 22^{\cdot}5^\circ = \frac{7 \text{ সেমি}}{7^{\cdot}6 \text{ সেমি}}$ (প্রায়) = $0^{\cdot}92$ (প্রায়)

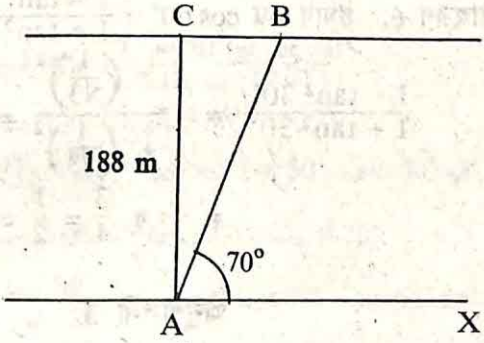
$\cos 67^{\cdot}5^\circ = \frac{2^{\cdot}9 \text{ সেমি}}{7^{\cdot}6 \text{ সেমি}}$ (প্রায়) = $0^{\cdot}38$ (প্রায়)

$\tan 22^{\cdot}5^\circ = \frac{2^{\cdot}9 \text{ সেমি}}{7 \text{ সেমি}}$ (প্রায়) = $0^{\cdot}41$ (প্রায়)

$\tan 67^{\cdot}5^\circ = \frac{7 \text{ সেমি}}{2^{\cdot}9 \text{ সেমি}}$ (প্রায়) = $2^{\cdot}41$ (প্রায়)

উদাহরণ **2.** 188 মিটার প্রশস্ত একটি নদীর এপার থেকে রওনা হওয়ার 4 মিনিট পর একটি নৌকা ওপারে পৌঁছায়। যদি নৌকার গতিবেগ ঘণ্টায় 3 কিমি হয় এবং স্রোতের টানে নৌকাটি যদি এপারের সঙ্গে 70° কোণ করে গিয়ে থাকে তবে দেখাও যে, $\cos 20^\circ = 0^{\cdot}94$.

পাশের চিত্রে দেখ নৌকাটি A বিন্দু থেকে রওনা হয়ে B বিন্দুতে পৌঁছায় এবং $\angle XAB = 70^\circ$ এবং নদীটির প্রস্থ $AC = 188$ মিটার।



চিত্র নং ঃ 31

যেহেতু $\angle XAC = 90^\circ$ এবং $\angle XAB = 70^\circ$

$\therefore \angle BAC = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$

আবার, যেহেতু নৌকাটি ঘণ্টায় 3 কিমি বেগে A থেকে B-তে যেতে 4 মিনিট সময় লাগে,

$\therefore AB = 3$ কিমি $\times \frac{4}{60} = 200$ মিটার

$\therefore \cos \angle BAC = \cos 20^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{188}{200} = 0^{\cdot}94$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 3. দেখাও যে $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1$

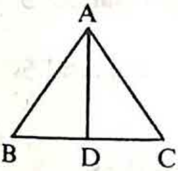
$$\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

উদাহরণ 4. মান নির্ণয় কর, $\sin^2 30^\circ + 4\cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ$

$$\sin^2 30^\circ + 4\cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \,.\, 1^2 - 2^2$$
$$= \frac{1}{4} + 4 - 4 = \frac{1}{4}.$$

উদাহরণ 5. ABC সমবাহু ত্রিভুজের AD একটি মধ্যমা

প্রমাণ কর $\sin\angle BAD = \cos\angle ABD$



চিত্র নং ঃ 32

যেহেতু ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং AD একটি মধ্যমা, তাই $\angle BAD = 30^\circ$ এবং $\angle ABD = 60^\circ$

$$\therefore \sin\angle BAD = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ = \cos\angle ABD.$$

উদাহরণ 6. প্রমাণ কর $\cos 60^\circ = \dfrac{1 - \tan^2 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ}$

$$\frac{1 - \tan^2 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ} = \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}}$$
$$= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ.$$

অনুশীলনী 3

1. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের $AB = AC = 10$ সেমি, $BC = 16$ সেমি $\angle BAC = 106^\circ$ হলে নিম্নলিখিত কোণানুপাতগুলির মান নির্ণয় কর (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান) ।

কোণের	কোণানুপাত					
পরিমাণ	sin	cos	tan	cosec	sec	cot
37°						
53°						

2. দেখাও যে,

(i) $\dfrac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \tan 60^\circ$

(ii) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$

(iii) $\cos 60^\circ = \cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ$

(iv) $\dfrac{2\tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ} = \sqrt{3}$

(v) $\tan^2 \dfrac{\pi}{4} \sin \dfrac{\pi}{3} \tan \dfrac{\pi}{6} \tan^2 \dfrac{\pi}{3} = 1\dfrac{1}{2}$

(vi) $\sin \dfrac{\pi}{3} \tan \dfrac{\pi}{6} + \sin \dfrac{\pi}{2} \cos \dfrac{\pi}{3} = 2\sin^2 \dfrac{\pi}{4}$

3. মান নির্ণয় কর :

(i) $\sin^2 45^\circ - \operatorname{cosec}^2 60^\circ + \sec^2 30^\circ$

(ii) $\sec^2 45^\circ - \cot^2 45^\circ - \sin^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

(iii) $3\tan^2 45^\circ - \sin^2 60^\circ - \dfrac{1}{3}\cot^2 30^\circ - \dfrac{1}{8}\sec^2 45^\circ$

(iv) $\dfrac{4}{3}\cot^2 30^\circ + 3\sin^2 60^\circ - 2\operatorname{cosec}^2 60^\circ - \dfrac{3}{4}\tan^2 30^\circ$

(v) $\dfrac{\frac{1}{3}\cos 30^\circ}{\frac{1}{2}\sin 45^\circ} + \dfrac{\tan 60^\circ}{\cos 30^\circ}$

(vi) $\sec^2 60^\circ - \cot^2 30^\circ - \dfrac{2\tan 30^\circ \operatorname{cosec} 60^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ}$

(vii) $4\sin^2 45^\circ + \tan^2 60^\circ + \operatorname{cosec}^2 30^\circ$

(viii) $\dfrac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ} + \cos 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \sin 30^\circ$

(ix) $\cot^2 30^\circ - 2\cos^2 60^\circ - \dfrac{3}{4}\sec^2 45^\circ - 4\sin^2 30^\circ$

(x) $\dfrac{\tan^2 60^\circ + \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ} + \cos 60^\circ \cos 30^\circ - \sin 60^\circ \sin 30^\circ$

(xi) $\dfrac{1 + \tan^2 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ} + \operatorname{cosec}^2 60^\circ - \cos^2 45^\circ + \sin^2 45^\circ + \dfrac{1 + \cot^2 60^\circ}{1 - \cot^2 60^\circ}$

(xii) $\dfrac{1 - \sin^2 30^\circ}{1 + \sin^2 45^\circ} \times \dfrac{\cos^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ}{\operatorname{cosec}^2 90^\circ - \cot^2 90^\circ} + (\sin 60^\circ \tan 30^\circ)$

4. প্রমাণ কর :

(i) $\tan^2 60^\circ - 2\sin 60^\circ = 3 - \cot 30^\circ$

(ii) $\sqrt{\dfrac{1 + \cos 30^\circ}{1 - \cos 30^\circ}} = \sec 60^\circ + \tan 60^\circ$

(iii) $\dfrac{2 \tan^2 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ} + \sec^2 45^\circ - \cot^2 45^\circ = \sec 60^\circ$

5. (i) ABC সমবাহু ত্রিভুজের BD একটি মধ্যমা ; প্রমাণ কর যে, $\tan \angle ABD = \cot \angle BAD$.

(ii) ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের $AB = AC$ এবং $\angle BAC = 90^\circ$, এখন $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক যদি BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{\sec \angle ACD}{\sin \angle CAD} = \operatorname{cosec}^2 \angle CAD$$

6. $x \sin 45^\circ \cos 45^\circ \tan 60^\circ = \tan^2 45^\circ - \cos 60^\circ$ হলে $x = ?$

7. $x \sin 60^\circ \cos^2 30^\circ = \dfrac{\tan^2 45^\circ \sec 60^\circ}{\operatorname{cosec} 60^\circ}$ হলে, x-এর মান কত ?

8. $x^2 = \sin^2 30^\circ + 4 \cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ$ হলে, x-এর মান কত ?

9. উত্তর-দক্ষিণ দিকে বিস্তৃত 3 নং জাতীয় সড়কের উপর অবস্থিত কোনো একটি বিন্দু থেকে উত্তর-পশ্চিম দিকে $530\sqrt{2}$ মিটার গেলে হবিবপুর হাই স্কুল পাওয়া যায়। জাতীয় সড়ক থেকে বিদ্যালয়টির সোজাসুজি দূরত্ব কত ?

তৃতীয় অধ্যায়

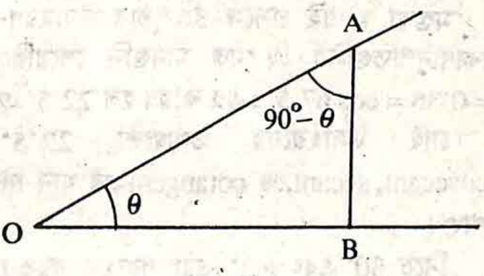
পূরক কোণের কোণানুপাত

জ্যামিতিতে তোমরা দেখেছ, যখন দুটি কোণের মান-সমষ্টি 90° হয় তখন কোণ দুটির একটিকে অপরটির পূরক কোণ বলা হয়। যেমন, 30° + 60° = 90° ; সুতরাং 30° কোণের পূরক কোণ 60° এবং 60° কোণের পূরক কোণ 30°। সেইমত 37°-এর পূরক কোণ 53°, 22·5°-এর পূরক কোণ 67·5°, ইত্যাদি। বিষয়টি আর সাধারণভাবে বললে তা দাঁড়ায়—একটি কোণের মান যদি θ° হয়, তবে তার পূরক কোণটির মান হবে (90° – θ°)।

এখন আমাদের দেখতে হবে θ° কোণের কোণানুপাত যদি জানা থাকে, তবে তা থেকে কি করে (90° – θ°) কোণের কোণানুপাত নির্ণয় করা যায়।

33 নং চিত্রের AOB সমকোণী ত্রিভুজে $\angle BOA = \theta$°, সুতরাং তার পূরক কোণ $\angle OAB$ হবে (90° – θ°)।

এবার দেখা যাক, এই দুটি সূক্ষ্মকোণের পরিপ্রেক্ষিতে কোনটি অতিভুজ, কোনটি লম্ব, কোনটি ভূমি।



চিত্র নং ঃ 33

θ° কোণের পরিপ্রেক্ষিতে

অতিভুজ = OA

লম্ব = AB

ভূমি = OB

(90° – θ°) কোণের পরিপ্রেক্ষিতে

অতিভুজ = OA

লম্ব = OB

ভূমি = AB

এখন, (90° – θ°) কোণের ক্ষেত্রে $\sin(90° - \theta°) = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{OB}{OA}$

কিন্তু θ° কোণের ক্ষেত্রে $\frac{OB}{OA} = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \cos\theta°$

(90° – θ°) কোণের ক্ষেত্রে $\cos(90° - \theta°) = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AB}{OA}$

কিন্তু θ° কোণের ক্ষেত্রে $\frac{AB}{OA} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভূজ}} = \sin\theta°$

(90° – θ°) কোণের ক্ষেত্রে $\tan(90° - \theta°) = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{OB}{AB}$

কিন্তু θ° কোণের ক্ষেত্রে $\frac{OB}{AB} = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \cot\theta°$

∴ উপরোক্ত আলোচনা থেকে পাওয়া গেল ঃ

$$\sin(90° - \theta°) = \cos\theta°$$
$$\cos(90° - \theta°) = \sin\theta°$$
$$\tan(90° - \theta°) = \cot\theta°$$

সুতরাং, $\text{cosec}(90° - \theta°) = \frac{1}{\sin(90° - \theta°)} = \frac{1}{\cos\theta°} = \sec\theta°$

$$\sec(90° - \theta°) = \frac{1}{\cos(90° - \theta°)} = \frac{1}{\sin\theta°} = \text{cosec}\,\theta°$$

$$\cot(90° - \theta°) = \frac{1}{\tan(90° - \theta°)} = \frac{1}{\cot\theta°} = \tan\theta°$$

মন্তব্য ঃ এই প্রসঙ্গে 36 পৃষ্ঠার উদাহরণ-এ 22·5° এবং 67·5°-এর কোণানুপাতগুলির যে মত মানগুলি পেয়েছিলে তাতে দেখ sin 22·5° = 0·38 = cos 67·5° ; এর কারণ হল 22·5°-এর পূরক কোণ।

সেই উদাহরণের তথ্যমতো 22·5° এবং 67·5° কোণের cosecant, secant, ও cotangent এর মান নির্ণয় করে মিলিয়ে দেখতো কি পাও।

নিচে 30° এবং 6O° (এরা পরস্পর পূরক-কোণ) কোণের কোণানুপাতের মান মিলিয়ে দেখানো হয়েছে। বিষয়টি ভাল করে দেখে বুঝে নাও।

$\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\text{cosec}\,30° = \sec 60° = 2$

$\cos 30° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\sec 30° = \text{cosec}\,60° = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\tan 30° = \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad$ $\cot 30° = \tan 60° = \sqrt{3}$.

আবার এই সূত্র অনুসারে–

$\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad$ $\sin 90° = \cos 0° = 1$

$\text{cosec}\,45° = \sec 45° = \sqrt{2}$ $\quad$ $\cos 90° = \sin 0° = 0$

$\tan 45° = \cot 45° = 1$

উদাহরণ 1. A ও B দুটি পরস্পর পূরক কোণ। প্রমাণ কর যে, $(\sin A + \sin B)^2 = 1 + 2 \sin A \cos A$.

তোমরা জান, যেহেতু A ও B পূরককোণ

তাই $\sin B = \sin (90° - A) = \cos A$

সুতরাং, $(\sin A + \sin B)^2 = (\sin A + \cos A)^2$

$$= \sin^2 A + \cos^2 A + 2 \sin A \cos A$$

$$= 1 + 2 \sin A \cos A.$$

উদাহরণ 2. দেখাও যে, $\sin^2 21° + \sin^2 69° = 1$

$$\sin 69° = \sin (90° - 21°) = \cos 21°$$

সুতরাং, $\sin^2 21° + \sin^2 69° = \sin^2 21° + \cos^2 21° = 1$

উদাহরণ 3. দেখাও যে, $\tan 15° + \tan 75° = \dfrac{\sec^2 15°}{\sqrt{\sec^2 15° - 1}}$

প্রমাণ, $\tan 15° + \tan 75° = \tan 15° + \tan (90° - 15°)$

$$= \tan 15° + \cot 15° = \tan 15° + \frac{1}{\tan 15°}$$

$$= \frac{\tan^2 15° + 1}{\tan 15°}$$

$$= \frac{\sec^2 15°}{\sqrt{\sec^2 15° - 1}}$$

অনুশীলনী 4

1. যদি α ও β কোণ দুটি পরস্পর পূরক কোণ হয়, তবে দেখাও যে,

   (*a*) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$ (*b*) $\cot \beta + \cos \beta = \dfrac{\cos \beta}{\cos \alpha}(1 + \sin \beta)$

   (*c*) $\dfrac{\sec \alpha}{\cos \alpha} - \cot^2 \beta = 1.$

2. যদি $\sin 17° = \dfrac{x}{y}$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\sec 17° - \sin 73° = \frac{x^2}{y\sqrt{y^2 - x^2}}$$

3. দেখাও যে, $\sec^2 12^\circ - \dfrac{1}{\tan^2 78^\circ} = 1.$

4. $\angle A + \angle B = 90^\circ$; দেখাও যে, $1 + \dfrac{\tan A}{\tan B} = \sec^2 A.$

5. দেখাও যে, $\text{cosec}^2 22^\circ \cot^2 68^\circ = \sin^2 22^\circ + \sin^2 68^\circ + \cot^2 68^\circ.$

6. যদি $\angle P + \angle Q = 90^\circ$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\cos P = \sqrt{\frac{\sin P}{\cos Q} - \sin P \cos Q}.$$

7. O-কেন্দ্রীয় যেকোনো একটি বৃত্তের AOB একটি ব্যাস এবং C বৃত্তের উপর যেকোনো একটি বিন্দু। এবার A, C ; B, C এবং O, C যুক্ত করে দেখাও যে, (*i*) $\tan \angle ABC = \cot \angle ACO$ (*ii*) $\sin^2 \angle BCO + \sin^2 \angle ACO = 1$ (*iii*) $\text{cosec}^2 \angle CAB - 1 = \tan^2 \angle ABC.$

8. $ABCD$ একটি আয়তক্ষেত্র। A, C যুক্ত করে প্রমাণ কর যে,

(*i*) $\tan \angle ACD = \cot \angle ACB$

(*ii*) $\tan^2 \angle CAD + 1 = \dfrac{1}{\sin^2 \angle BAC}.$

চতুর্থ অধ্যায়

বাস্তব সমস্যায় কোণানুপাতের প্রয়োগ

ভূমিকাতে 'ত্রিকোণমিতি কেন' বলতে গিয়ে আমরা বলেছিলাম যে সাক্ষাৎভাবে মেপে বা গণিতের অন্য কোনো শাখার সাহায্যে কোনো কিছুর উচ্চতা, দৈর্ঘ্য ও দূরত্ব সম্বন্ধে অনেক তথ্য যা আমরা সহজে নির্ণয় করতে পারি না, তা ত্রিকোণমিতির সাহায্যে সহজেই নির্ণয় করতে পারি। মনে কর, প্রান্তরের মাঝখানে একটি উঁচু খাড়াই পাহাড় রয়েছে ; এর উচ্চতা নির্ণয় করতে হবে। খাড়াই পাহাড় ওঠা কষ্টসাধ্য, এমন কি বিপদসঙ্কুল হতে পারে। ত্রিকোণমিতির সাহায্যে আমরা কিন্তু পাহাড়ে ওঠার কষ্ট ও ঝুঁকি না নিয়েও প্রান্তরের মাটিতে দাঁড়িয়েই পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয় করতে পারি। তেমনি পারি খাল পার না হয়েও খালের ওপারের উঁচু তালগাছটার উচ্চতা ও দূরত্ব নির্ণয় করতে। গাছ বা মনুমেন্টের ছায়ার দৈর্ঘ্য মেপে তার উচ্চতা নির্ণয় করতে পারি। তার চেয়েও বড় কথা, পৃথিবীর মাটিতে দাঁড়িয়ে বলে দিতে পারি চন্দ্র, সূর্যের ব্যাস,কত, তারা কত দূরে আছে ইত্যাদি অনেক কিছু। কি করে তা করা যায় এই অধ্যায় উদাহরণসহ তা দেখানো হল।

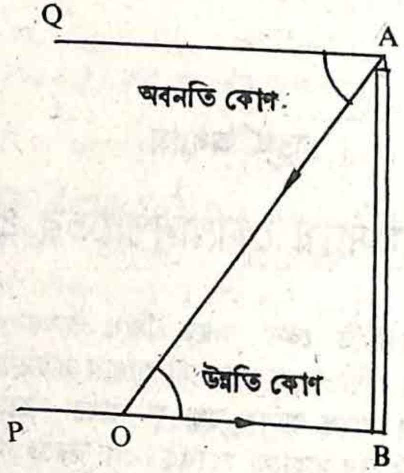
উন্নতি কোণ ও অবনতি কোণ ঃ

মনে কর, AB একটি স্তম্ভ যার শীর্ষ বিন্দু A এবং স্তম্ভের পাদদেশের সঙ্গে অনুভূমিক সরলরেখাটি হল BP (পরের পৃষ্ঠার চিত্র নং 34 দেখ)।

এবার মনে কর B- এর উপর O যেকোনো একটি বিন্দু।

এখন একজন দর্শক O বিন্দুতে চোখ রেখে স্তম্ভের চূড়ার দিকে তাকালে যে কোণে স্তম্ভের চূড়াটি দেখতে পারে তা হল $\angle BOA$. এই কোণটি বলা হয় উন্নতি কোণ। সুতরাং, এখানে O বিন্দু সাপেক্ষে A বিন্দুর উন্নতি কোণ $\angle BOA$.

আবার এমন হতে পারে যে, স্তম্ভের চূড়ায় উঠে কোনো এক ব্যক্তি A বিন্দুতে চোখ রেখে স্তম্ভের পাদবিন্দুগামী অনুভূমিক রেখার উপর



চিত্র নং ঃ 34

O বিন্দুতে আছে এমন একটি বস্তু দেখছেন। তখন সেই ব্যক্তি যে কোণে O বিন্দুতে বস্তুটি দেখবেন সেই কোণটি হল A বিন্দু সাপেক্ষে O বিন্দুর অবনতি কোণ। এই অবনতি কোণের পরিমাণ পেতে হলে A বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত অনুভূমিক সরলরেখা AQ কল্পনা করতে হবে এবং তখন অবনতি কোণের পরিমাণ হবে $\angle QAO$.

একটি বিষয় লক্ষনীয় ঃ

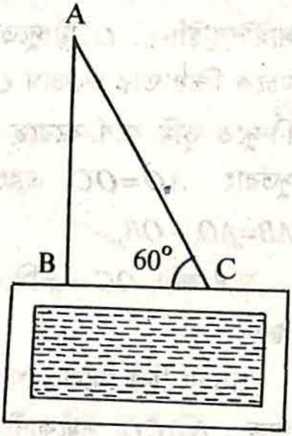
এখানে $BO \parallel AQ$ এবং OA তাদের ভেদক। তাই উন্নতি কোণ $\angle BOA =$ অবনতি কোণ $\angle QAO$ (একান্তর কোণ বলে)। কিন্তু তবু এদের আলাদা আলাদা করে চিহ্নিত করা প্রয়োজন, কারণ বাস্তব ক্ষেত্রে আমাদের এদের আলাদা আলাদাভাবে নিয়ে সমস্যা সমাধান করতে হতে পারে।

বিঃ দ্রঃ—আগেই বলা হয়েছে বর্তমানে তোমাদের সাধারণত আদর্শ কোণ নিয়েই কাজ করতে হবে। যদি কোনো সমস্যায় অন্য কোনো কোণ থাকে তবে তার জন্য প্রয়োজনীয় কোণানুপাতের মান দেওয়া থাকবে। উচ্চতর শ্রেণীতে অবশ্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মানের তালিকার সাহায্য নিয়ে তোমরা যেকোনো পরিমাণের কোণ নিয়ে কাজ করতে পারবে।

উদাহরণ 1. তোমাদের পুকুরের পাড়ে একটি নারকেল গাছ আছে। গাছে না উঠে তুমি তার উচ্চতা মাপতে চাও। তুমি কি করবে ?

মনে করি, AB একটি নারকেল গাছ। এর উচ্চতা নির্ণয় করতে হবে।

তুমি পুকুরের পাড় ধরে নারকেল গাছের গোড়া থেকে কিছু দূরে একটি বিন্দুতে সরে গিয়ে সেই বিন্দু থেকে নারকেল গাছের অগ্রভাগের উন্নতি কোণ নির্ণয় করবে এবং তখন ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সাহায্যে নারকেল গাছের উচ্চতা নির্ণয় করতে পারবে।



চিত্র নং ঃ 35

এখানে মনে করি, নারকেল গাছের পাদবিন্দু B থেকে পুকুরের পাড় ধরে 12 মিটার দূরে C বিন্দুতে সরে যাওয়ায় C বিন্দু সাপেক্ষে A বিন্দুর উন্নতি কোণ 60° হয়েছে।

এখন A, C যুক্ত করলে ABC সমকোণী ত্রিভুজ পাওয়া যাবে, যার একটি সূক্ষ্মকোণ $\angle ACB = 60°$ এবং এই কোণের পরিপ্রেক্ষিতে ভূমি $BC = 12$ মিটার।

এবং লম্ব AB = নারকেল গাছের উচ্চতা = x মি

এবার ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সংজ্ঞা থেকে তোমরা জান

$$\tan \angle ACB = \tan 60° = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{x}{12}.$$

আবার আদর্শ-কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মানের তালিকা থেকে পাওয়া যায়, $\tan 60° = \sqrt{3}$

$$\text{সুতরাং, } \frac{x}{12} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \quad x = 12\sqrt{3} = 12 \times 1{\cdot}732 \text{ (প্রায়)} = 20{\cdot}784 \text{ (প্রায়)}$$

সুতরাং নারকেল গাছটির উচ্চতা 20·784 মিটার (প্রায়),

অথবা 20 মিটার 78·4 সেন্টিমিটার প্রায়।

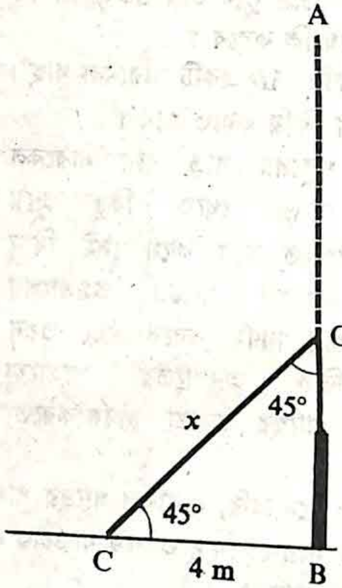
উদাহরণ 2. ঝড়ে একটি লাইট পোস্ট মচকে গিয়ে তার অগ্রভাগ গোড়া থেকে 4 মিটার দূরে ভূমি স্পর্শ করেছে এবং অনুভূমিক রেখার সঙ্গে 45° কোণ উৎপন্ন করেছে। লাইট পোস্টটি কত লম্বা ছিল ?

মনে করি, AB লাইটপোস্টটি O বিন্দুতে মচকে গিয়ে তার অগ্রভাগ C বিন্দুতে ভূমি স্পর্শ করেছে। সুতরাং $AO=OC$ এবং $AB=AO+OB$.

মনে করি, $OC = x$ মি $= AO$.

36 নং চিত্র থেকে দেখতে পাচ্ছ, ΔBCO সমকোণী ত্রিভুজে $\angle BCO = 45^\circ$,

ভূমি $BC = 4$ এবং অতিভূজ $OC = x$ মি।



চিত্র ঃ 36

আরও দেখ, যেহেতু $\angle BCO = 45^\circ$, সুতরাং পূরক $\angle BOC = 45^\circ$

$\therefore BC = BO = 4$ মি।

এবার $\cos\angle BCO = \cos 45^\circ$

$$= \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভূজ}} = \frac{4}{x}$$

আবার তালিকা থেকে পাওয়া যায়, $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

সুতরাং $\frac{4}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

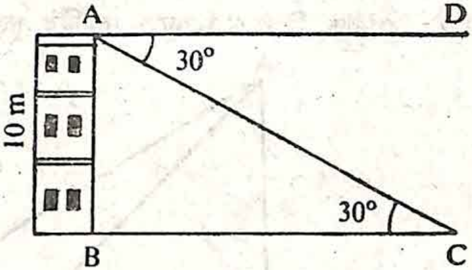
$\therefore x = 4\sqrt{2} = 4 \times 1{\cdot}414 = 5{\cdot}656$ (প্রায়)

সুতরাং পোষ্টটির উচ্চতা $AB = AO + OB = (5{\cdot}656)$ মি (প্রায়)

$= 9{\cdot}66$ মি (প্রায়) ; অর্থাৎ 9 মি 66 সেমি (প্রায়)।

উদাহরণ 3. খালের ঠিক পারে অবস্থিত একটি তিনতলা বাড়ির ছাদ থেকে তুমি তোমার সোজা-সুজি খালের ঠিক অপর পারের একটি কিলোমিটার পোষ্ট দেখছিলে। তোমার চোখ থেকে সেই পোষ্টের পাদবিন্দুর অবনতি কোণ যদি 30° হয় এবং বাড়িটির উচ্চতা যদি 10 মিটার হয় খালটি কত চওড়া ?

বাড়িটির ছাদের প্রান্তবিন্দু, বাড়িটির পাদবিন্দু এবং খালের ওপারের কিলোমিটার পোষ্টের পাদবিন্দু যথাক্রমে A, B ও C ; এবার A বিন্দু দিয়ে অনুভূমিক সরলরেখা AD টানা হল। A,C যুক্ত করে অবনতি কোণ পাওয়া যাবে $\angle DAC = 30°$, আবার B,C যুক্ত করে সমকোণী ত্রিভুজ ABC পাওয়া গেল, যার সূক্ষ্মকোণ $\angle ACB = \angle DAC = 30°$ এবং এর পরিপ্রেক্ষিতে লম্ব $AB = 10$ মি এবং ভূমি $BC = x$ মি = খালের প্রস্থ।



চিত্র নং ঃ 37

আমরা জানি, $\tan 30° = \frac{AB}{BC} = \frac{10}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore x = 10\sqrt{3} = 10 \times 1·732$ (প্রায়) $= 17·32$ (প্রায়)

$\therefore$ খালটি 17·32 মি (প্রায়) বা 17·32 মি (প্রায়) বা 17 মি 32 সেমি (প্রায়) চওড়া।

উদাহরণ 4. সূর্যের উন্নতি কোণ যখন 60° তখন একটি তালগাছের ছায়ার দৈর্ঘ্য যদি 12 মি হয়, তবে তালগাছটির উচ্চতা কত ?

38 নং চিত্রের AB তাল- গাছটির ছায়া BC এবং তখন $\angle ACB = 60°$

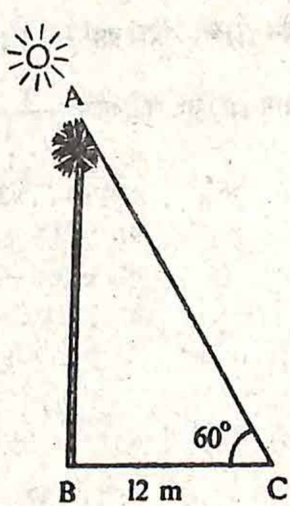
মনে করি, তালগাছটির উচ্চতা x মি।

এখন $\tan 60° = \frac{AB}{BC} = \frac{x}{12} = \sqrt{3}$

$\therefore x = 12\sqrt{3} = 12 \times 1·732$ (প্রায়)

$= 20.784$ (প্রায়)

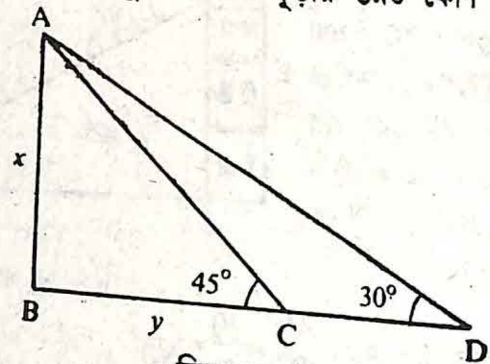
$\therefore$ তালগাছটির উচ্চতা প্রায় 20·784 মিটার।



চিত্র নং ঃ 38

উদাহরণ 5. একটি নদীর অপর পারে একটি কারখানা আছে। তার চিমনির অগ্রভাগটি তুমি দেখতে পাচ্ছ। নদী পার না হয়ে এপার থেকেই চিমনিটির উচ্চতা কি করে নির্ণয় করা যায় দেখ।

মনে করি, চিমনিটির উচ্চতা $AB = x$ মি। প্রথমে নদীর এপারে চিমনির ঠিক বিপরীত দিকে C বিন্দুতে চিমনির চুড়ার উন্নত কোণ পাওয়া গেল



চিত্র নং ঃ 39

45° এবং পরে নদীর পার থেকে BC বরাবর 14 মিটার দূরে সরে গিয়ে D বিন্দুতে চিমনির চুড়ার উন্নতি কোণ পাওয়া গেল 30°.

এখন মনে করি, $BC = y$ মি = নদীর প্রস্থ

তাহলে $\tan 45^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{x}{y} = 1$ (i)

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BD} = \frac{x}{y+14} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (ii)$$

এখন (i) নং সমীকরণ $\frac{x}{y} = 1$ থেকে পাই, $x = y$.

এবার (ii) নং সমীকরণ $\frac{x}{y+14} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ তে y-এর বদলে x বসিয়ে পাই,

$$\frac{x}{x+14} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

বা, $x\sqrt{3} = x + 14$

বা, $x\sqrt{3} - x = 14$

বা, $x(\sqrt{3} - 1) = 14$

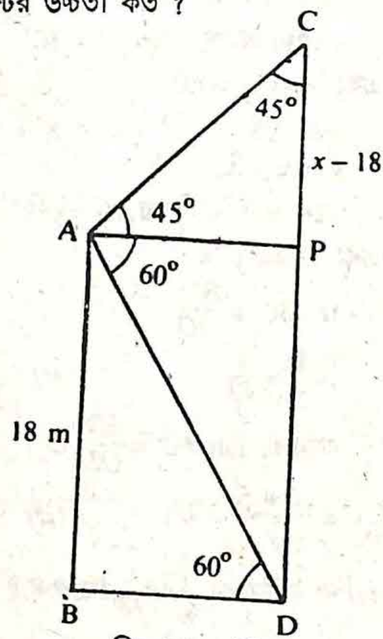
$$\therefore x = \frac{14}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{14(\sqrt{3}+1)}{2}$$

$= 7(1{\cdot}732 + 1)$ (প্রায়) $= 19{\cdot}124$ (প্রায়)।

সুতরাং চিমনিটির উচ্চতা 19·124 মিটার (প্রায়)।

উদাহরণ 6. একটি 18 মি উঁচু পাঁচতলা বাড়ির ছাদ থেকে দেখলে একটি মনুমেন্টের চূড়ার উন্নতি কোণ 45° এবং মনুমেন্টের পাদদেশের অবনতি কোণ 60° দেখা যায়। মনুমেন্টের উচ্চতা কত ?



চিত্র নং : 40

দেওয়া আছে,
পাঁচতলা বাড়ির উচ্চতা
$AB = 18$ মি,
$\angle CAP = 45^\circ$,
$\angle PAD = 60^\circ = \angle ADB$
মনে করি, মনুমেন্টের উচ্চতা
$CD = x$
$CP = (x - 18)$ মি
আর মনে করি, $BD = y$ মি $= AP$
তা হলে, $\tan \angle CAP$
$= \tan 45^\circ = \dfrac{CP}{AP}$
$= \dfrac{x-18}{y} = 1 \quad \ldots (i)$
আবার, $\tan \angle ADB = \tan 60^\circ$
$$= \frac{AB}{BD} = \frac{18}{y} = \sqrt{3} \qquad (ii)$$

এখন *(i)* নং সমীকরণ $\dfrac{x-18}{y} = 1$ থেকে পাই $y = x - 18$

এবার y-এর মান *(ii)* নং সমীকরণ $\dfrac{18}{y} = \sqrt{3}$ তে বসিয়ে পাই,

$$\frac{18}{x-18} = \sqrt{3} \text{ বা, } x\sqrt{3} - 18\sqrt{3} = 18$$

বা, $x\sqrt{3} = 18 + 18\sqrt{3}$
$\therefore x = \dfrac{18(1+\sqrt{3})}{\sqrt{3}} \, 6\sqrt{3}\,(1+\sqrt{3}) = 28{\cdot}392$ (প্রায়)

সুতরাং মনুমেন্টটির উচ্চতা প্রায় 28·392 মিটার।

উদাহরণ 7. সমুদ্রতীর থেকে দূরে নোঙর করা একটি জাহাজের ডেক থেকে দেখলে সমুদ্রতীরে অবস্থিত একটি বাতি-ঘরের চূড়া ও পাদদেশের উন্নতিকোণ যথাক্রমে 60° এবং 30° ; বাতিঘরটি যদি সমুদ্রতল থেকে 8 মি

উঁচুতে অবস্থিত এবং জাহাজের ডেকটি যদি সমুদ্রতল থেকে 3 মি উঁচু হয়, তবে বাতি-ঘরটির উচ্চতা কত ?

মনে করি, বাতিঘরের উচ্চতা $= AB$

দেওয়া আছে, $\angle BOD = 30^\circ$

এবং $\angle AOD = 60^\circ$

$BC = 8$ মি এবং $DC = 3$ মি

$BD = 5$ মি।

মনে করি, বাতিঘর $AB = x$ মি

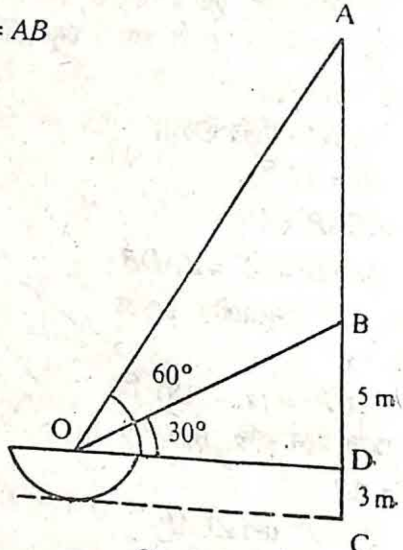
এবং $OD = y$ মি।

$\tan 30^\circ = \dfrac{BD}{OD}$

$= \dfrac{5}{y} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ .. (i)

আবার, $\tan 60^\circ = \dfrac{AD}{OD}$

$= \dfrac{x+5}{y} = \sqrt{3}$ .. (ii)



চিত্র নং ঃ 41

(i) নং সমীকরণ $\dfrac{5}{y} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ থেকে পাই,

$y = 5\sqrt{3}$

এখন y- এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$\dfrac{x+5}{5\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

বা, $x + 5 = 5\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 15$

$\therefore x = 15 - 5 = 10$

সুতরাং বাতি ঘরটির উচ্চতা 10 মিটার।

উদাহরণ 8. 11 মিটার উঁচু একটি বাড়ির ছাদ থেকে দেখলে একটি ল্যাম্পপোস্টের চূড়া ও পাদবিন্দুর অবনতি-কোণ যথাক্রমে 30° এবং 60°। ল্যাম্পপোস্টটির উচ্চতা কত ?

দেওয়া আছে, বাড়ির উচ্চতা $AB = 11$ মি, $\angle PAC = 30^\circ$ এবং $\angle PAD = 60^\circ$; এবং $PD = AB = 11$ মি

মনে করি, ল্যাম্পপোস্ট $CD = x$ মি

সুতরাং, $PC = (11 - x)$ মি

আবার মনে করি,

$AP = y$ মি

এখন, $\tan \angle PAC$

$= \tan 30°$

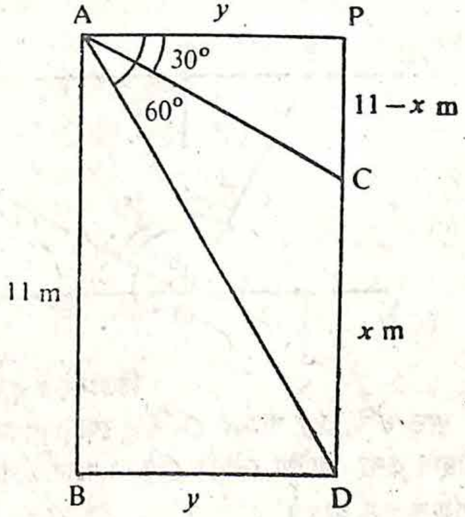
$= \frac{PC}{AP}$

$= \frac{11 - x}{y} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ...(i)

আবার, $\tan \angle PAD$

$= \tan 60°$

$= \frac{PD}{AP} = \frac{11}{y} = \sqrt{3}$...(ii)



চিত্র নং : 42

এবার (i) নং সমীকরণ,

$\frac{11 - x}{y} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ থেকে পাই

$y = (11 - x)\sqrt{3}$

এখন y-এর মান

(ii) নং সমীকরণ $\frac{11}{y} = \sqrt{3}$ তে বসিয়ে পাই,

$\frac{11}{(11 - x)\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

বা, $11 = (11 - x)\sqrt{3}.\sqrt{3}$

বা, $11 = 33 - 3x$

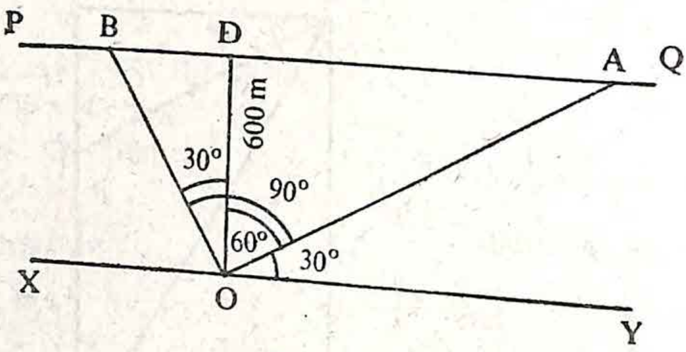
বা, $3x = 22$

$\therefore x = \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3}$

সুতরাং ল্যাম্পপোষ্টটির উচ্চতা $7\frac{1}{3}$ মিটার।

উদাহরণ 9. একটি 600 মিটার নদীর কোনো একটি ঘাট থেকে দুটি নৌকা দুদিকে মুখ করে নদীর ওপারে যাওয়ার জন্য রওনা হল। প্রথম

নৌকাটি নদীর এপারের সঙ্গে 30° কোণ করে যাচ্ছে, আর দ্বিতীয় নৌকাটি প্রথম নৌকার গতিপথের সঙ্গে 90° কোণ করে চলছে। যখন দুটি নৌকাই ওপারে পৌঁছবে তখন তাদের দূরত্ব কত হবে ?



চিত্র নং ঃ 43

মনে করি, XY পারের O বিন্দু থেকে প্রথম নৌকা OA বরাবর ওপারে পৌঁছায় এবং দ্বিতীয় নৌকা OB বরাবর ওপারে পৌঁছায়। AB-এর দূরত্ব নির্ণয় করতে হবে।

দেওয়া আছে, $\angle AOY = 30^\circ$ এবং $\angle AOB = 90^\circ$

এবং $OD = 600$ মিটার।

সুতরাং, $\angle DOA = 60^\circ$ এবং $\angle BOD = 30^\circ$

মনে করি, $AD = x$ মি এবং $BD = y$ মি

এবার ΔBOD এবং ΔAOD থেকে পাই

$$\tan 60^\circ = \frac{x}{600} = \sqrt{3} \qquad \text{......} \quad (1)$$

এবং $$\tan 30^\circ = \frac{y}{600} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{......} \quad (2)$$

সুতরাং (1) নং সমীকরণ থেকে পাই, $x = 600\sqrt{3}$

এবং (2) নং সমীকরণ থেকে পাই, $y = \dfrac{600}{\sqrt{3}}$

$$\therefore \quad AB = (x+y) \text{ মি} = \left(600\sqrt{3} + \frac{600}{\sqrt{3}}\right) \text{ মি}$$

$$= \frac{1800 + 600}{\sqrt{3}} \text{ মি}$$

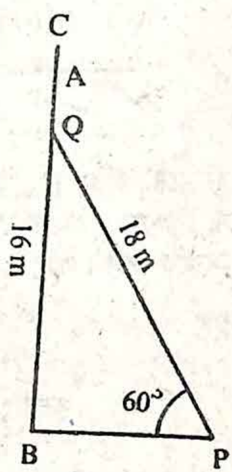
$$= 800\sqrt{3} \text{ মি} = 1385\cdot6 \text{ মি (প্রায়)}$$

ওপারে পৌঁছালে নৌকা দুটির মধ্যে দূরত্ব হবে 1385·6 মি (প্রায়)।

উদাহরণ 10. একটি পাঁচতলা বাড়ির দেওয়ালের সঙ্গে মিলিয়ে একটি মই দাঁড় করিয়ে রাখায় তার অগ্রভাগ ছাদ থেকে 2 মিটার উঁচুতে ছিল। এখন মই-এর গোড়াটি কিছু দূরে সরিয়ে নিয়ে যাওয়ায় মইটি ভূমিতলের সঙ্গে 60° কোণ উৎপন্ন করেছে। বাড়িটির উচ্চতা যদি 16 মিটার হয়, তবে (i) মই-এর গোড়াটি এখন দেওয়ালের গোড়া থেকে কত দূরে আছে ? (ii) মই-এর অগ্রভাগ ছাদ থেকে কত নিচে আছে ?

পাশের চিত্রে, AB = পাঁচতলা বাড়ির উচ্চতা = 16 মিটার

মইটি দেওয়ালের সঙ্গে মিলিয়ে দাঁড় করিয়ে রাখার ফলে, মনে করি, মইটি C বিন্দু পর্যন্ত পৌঁছল।



চিত্র নং : 44

PQ = মই-এর দৈর্ঘ্য $BC = AB + AC =$ $(16 + 2)$ মিটার = 18 মিটার

এবং $\angle BPQ = 60^\circ$

(i) BP-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে হবে।

মনে করি, $BP = x$ মি

সুতরাং, $\cos 60^\circ = \frac{BP}{PQ}$

$\therefore \frac{x}{18} = \frac{1}{2} \quad \therefore x = \frac{18}{2} = 9$

সুতরাং মই-এর গোড়াটি এখন দেওয়ালের গোড়া থেকে 9 মিটার দূরে আছে। (ii) এবার AQ-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে হবে

মনে করি, $BQ = y$ মি

সুতরাং, $\tan 60^\circ = \frac{BQ}{BP} = \frac{y}{9} = \sqrt{3}$

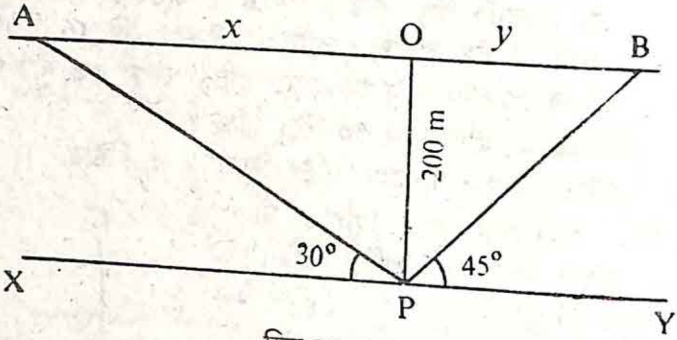
$\therefore y = 9\sqrt{3} = 15{\cdot}59$ (প্রায়)

$\therefore$ মই-এর অগ্রভাগ এখন বাড়ির ছাদ থেকে

$(16 - 15{\cdot}59)$ মিটার (প্রায়) $= 0{\cdot}41$ মিটার (প্রায়) নিচে আছে।

উদাহরণ 11. একটি পাখি ভূমিতলের সঙ্গে সমান্তরাল রেখায় 200 মিটার উঁচু দিয়ে উত্তর থেকে দক্ষিণদিকে যাচ্ছিল। মাঠের মাঝখানে দাঁড়িয়ে সুশোভন প্রথমে পাখিটিকে উত্তরদিকে 30° কোণে দেখতে পেল।

3 মিনিট পরে আবার দক্ষিণ দিকে 45° কোণে দেখতে পেল । আসন্ন পূর্ণসংখ্যার কিলোমিটারে পাখিটির গতিবেগ ঘণ্টায় কত ছিল ?



চিত্র নং ঃ 45

মনে করি, P বিন্দু থেকে সুশোভন প্রথমে পাখিটিকে 30° কোণে A বিন্দুতে দেখতে পেল এবং 3 মিনিট পরে 45° কোণে B বিন্দুতে দেখতে পেল । আরও মনে করি, $AO = x$ মি এবং $BO = y$ মি

এখন $\angle APO = (90° - 30°) = 60°$

এবং $\angle BPO = (90° - 45°) = 45°$

সুতরাং, $\tan \angle APO = \tan 60° = \dfrac{x}{200} = \sqrt{3}$ মি

$\therefore \quad x = 200\sqrt{3} = 346{\cdot}4$

আবার, $\tan \angle BPO = \tan 45°$

$= \dfrac{y}{200} = 1$

$\therefore \quad y = 200$

$\therefore$ 3 মিনিটে পাখিটি $(346{\cdot}4 + 200)$ মিটার $= 546{\cdot}4$ মিটার যায়

$\therefore$ এক ঘণ্টায় পাখিটি $\dfrac{546\ 4}{3} \times 60$ মিটার

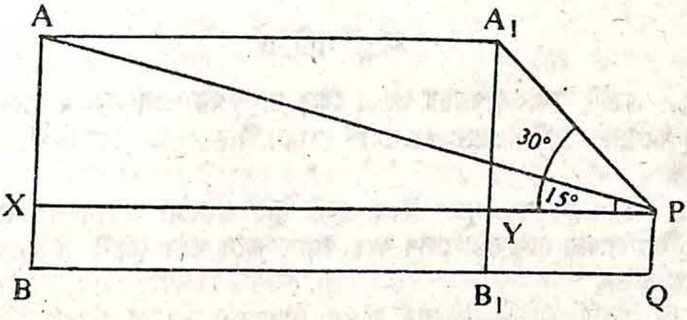
$= 10928$ মিটার যায় ।

সুতরাং আসন্ন পূর্ণসংখ্যার কিলোমিটারে পাখিটির গতিবেগ 11 কিমি/ঘণ্টা ।

উদাহরণ 12. খালের ওপারে দাঁড়িয়ে থাকা একটি নৌকার মাস্তুলের অগ্রভাগ এপারে নৌকার ঠিক বিপরীত দিকে দাঁড়িয়ে থাকা এক ব্যক্তি 15° উন্নতি কোণে দেখতে পান । নৌকাটি সোজাসুজি এপারে আসার জন্য রওনা হওয়ার 40 সেকেণ্ড পর তিনি মাস্তুলের অগ্রভাগ 30° উন্নতি কোণে দেখতে

পান। যদি জলতল থেকে ওই ব্যক্তির চোখের উচ্চতা 3 মিটার এবং মাস্তুলের উচ্চতা 12 মিটার হয়, তবে খালটি কত চওড়া এবং নৌকাটির গতিবেগ ঘণ্টায় কত ?

($\tan 15^\circ = 0{\cdot}26$ ধরতে হবে)



চিত্র ঃ 46

মনে করি, P বিন্দু থেকে ওই ব্যক্তি প্রথমে মাস্তুলের অগ্রভাগ A বিন্দুতে 15° কোণে দেখতে পান এবং পরে দ্বিতীয় অবস্থায় মাস্তুলের অগ্রভাগ A_1 বিন্দুতে 30° কোণে দেখতে পান।

প্রদত্ত তথ্য মত $PQ = 3$ মিটার এবং $AB = 12$ মিটার

$\therefore \quad AX = A_1Y = (12 - 3)$ মিটার $= 9$ মিটার

মনে করি, $PX =$ খালের প্রস্থ $= x$ মি

এবং $XY = 40$ সেকেণ্ডে নৌকাটি যে দূরত্বে চলে $= y$ মি

সুতরাং,

$$\tan 15^\circ = \frac{AX}{PX} = \frac{9}{x} = 0{\cdot}26 \qquad \ldots\ldots \quad (i)$$

$$\therefore \quad x = \frac{9}{0{\cdot}26} = 34{\cdot}615 \text{ (প্রায়)}$$

$\therefore$ খালটি 34·615 মিটার (প্রায়) চওড়া

$$\text{আবার, } \tan 30^\circ = \frac{A_1Y}{PY} = \frac{9}{x-y} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \ldots\ldots \quad (ii)$$

$$\therefore \quad x - y = 9\sqrt{3} = 15{\cdot}588 \text{ (প্রায়)}$$

এখানে (ii) নং সমীকরণে x-এর মান বসিয়ে পাই

$$y = (34{\cdot}615 - 15{\cdot}588) \text{ (প্রায়)}$$
$$= 19{\cdot}027 \text{ (প্রায়)}$$

অর্থাৎ, নৌকাটি 40 সেকেণ্ডে প্রায় 19·027 মিটার যায়।

$\therefore$ নৌকাটির গতিবেগ $= \frac{19\cdot027}{40} \times 60 \times 60$ মিটার/ঘণ্টা

$= 1712\cdot43$ মি/ঘণ্টা (প্রায়) ।

সুতরাং, (i) খালটির প্রস্থ $= 34\cdot615$ মিটার (প্রায়)

(ii) নৌকার গতিবেগ $= 1712\cdot43$ মি/ঘণ্টা (প্রায়)

অনুশীলনী 5

1. একটি নারকেল গাছের গোড়া থেকে অনুভূমিক তলে 20 মি দূরের একটি বিন্দু সাপেক্ষে গাছটির অগ্রভাগের উন্নতি কোণ যদি 60° হয়, তবে গাছটির উচ্চতা কত ?

2. 150 মি লম্বা সূতো নিয়ে একটি ঘুড়ি ওড়ানো হয়েছে । ঘুড়িটি যদি অনুভূমিক রেখার সঙ্গে 60° কোণ করে উড়তে থাকে তবে ঘুড়িটি মাটি থেকে কত উঁচুতে রয়েছে ?

3. একটি বাড়ির তেতলায় আগুন লেগেছে । ফায়ার ব্রিগেডের লোকজন তেতলার একটি জানালার গোড়ায় মই লাগিয়ে হোজ পাইপ দিয়ে জল ঢালছে । মইটি যদি $6\sqrt{3}$ মিটার লম্বা হয় এবং তা যদি মাটির সঙ্গে 60° কোণ করে দাঁড়িয়ে থাকে, তবে জানালাটি কত উঁচুতে রয়েছে ?

4. ঝড়ে একটি টেলিগ্রাফ পোস্ট মাটি থেকে কিছু উপরে মচকে যাওয়ায় তার অগ্রভাগ গোড়া থেকে $8\sqrt{3}$ মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করেছে এবং অনুভূমিক রেখার সঙ্গে 30° কোণ উৎপন্ন করেছে । পোস্টটি মাটি থেকে কত উপরে মচকে ছিল ? পোস্টটি কত উঁচু ছিল ?

5. একটি রাস্তার দুপাশে পরস্পর বিপরীত দিকে দুটি বাড়ি আছে । প্রথম বাড়ির দেওয়ালের গোড়া থেকে 6 মিটার দূরে একটি মই-এর গোড়া রেখে যদি মইটিকে দেওয়ালে ঠেকানো যায়, তবে তা অনুভূমিক রেখার সঙ্গে 30° কোণ উৎপন্ন করে । কিন্তু মইটিকে যদি একই জায়গায় রেখে দ্বিতীয় বাড়ির দেওয়ালে লাগানো যায়, তবে তা অনুভূমিক রেখার সঙ্গে 60° কোণ উৎপন্ন করে ।

(i) মইটির দৈর্ঘ্য কত ?

(ii) দ্বিতীয় বাড়ির দেওয়ালের গোড়া থেকে মইটির গোড়া কত দূরে রয়েছে ?

(iii) রাস্তাটি কত চওড়া ?

(iv) দ্বিতীয় বাড়ির কত উঁচুতে মইটির অগ্রভাগ স্পর্শ করবে ?

6. একটি চিমনির গোড়ার সঙ্গে সমতলে অবস্থিত একটি বিন্দু সাপেক্ষে চিমনির চূড়ার উন্নতি কোণ যদি 60° হয় এবং সেই বিন্দু এবং চিমনির গোড়ার সঙ্গে একই সরলরেখায় অবস্থিত আরও 24 মিটার দূরের অপর একটি বিন্দু সাপেক্ষে চিমনির চূড়ার উন্নতি কোণ 30° হয়, তবে চিমনির উচ্চতা কত ?

($\sqrt{3}$-এর আসন্ন মান $1\cdot732$ ধরে তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় কর)

7. একটি নদীর ওপারের একটি তালগাছের সোজাসুজি এপারে একটি খুঁটি পোঁতা হল। এবার নদীর পার ধরে ঐ খুঁটি থেকে $7\sqrt{3}$ মিটার সরে গিয়ে দেখা গেল নদীর পারের পরিপ্রেক্ষিতে গাছটি এখন 60° কোণে রয়েছে। নদীটি কত মিটার চওড়া?

8. সূর্যের উন্নতি কোণ যখন 30°, তখন একটি স্তম্ভের ছায়ার দৈর্ঘ্য 9 মিটার হলে, স্তম্ভটির উচ্চতা কত?

9. সূর্যের উন্নতি কোণ যখন 45° থেকে 60°-তে বেড়ে যায়, তখন একটি খুঁটির ছায়ার দৈর্ঘ্য 3 মিটার কমে যায়। খুঁটিটির উচ্চতা কত? ($\sqrt{3} = 1.732$ ধরে তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় কর)

10. একটি কারখানার চিমনি থেকে 30 মিটার দূরে অবস্থিত একটি তিনতলা বাড়ির ছাদ থেকে দেখলে চিমনির চূড়ার উন্নতি কোণ 30° দেখা যায়। বাড়িটি যদি $9\sqrt{3}$ মিটার উঁচু হয়, তবে চিমনির উচ্চতা কত?

11. একটি লাইট-হাউস থেকে তার সঙ্গে একই সরলরেখায় অবস্থিত দুটি জাহাজের মাস্তুলের গোড়ার অবনতি কোণ যদি যথাক্রমে 60° ও 30° হয় এবং কাছের জাহাজের মাস্তুল যদি লাইট-হাউস থেকে 150 মিটার দূরে থাকে, তবে দূরের জাহাজের মাস্তুল কত দূরে রয়েছে? লাইট-হাউসটির উচ্চতা কত?

12. একটি পাঁচতলা বাড়ির ছাদের কোনো বিন্দু থেকে দেখলে মনুমেন্টের চূড়ার উন্নতি কোণ এবং গোড়ার অবনতি কোণ যদি যথাক্রমে 60° ও 30° হয় এবং বাড়িটির উচ্চতা যদি 16 মিটার হয়, তবে মনুমেন্টের উচ্চতা কত? বাড়িটি মনুমেন্ট থেকে কত দূরে অবস্থিত?

13. 250 মিটার লম্বা সুতো দিয়ে একটি ঘুড়ি ওড়ানো হয়েছে। সুতোটি যখন অনুভূমিক রেখার সঙ্গে 60° কোণ করে থাকে, তখন ঘুড়িটি কত উঁচুতে থাকে? সুতোটি যদি 45° কোণ করে থাকে তবে ঘুড়িটি কত উঁচুতে থাকবে? এদের মধ্যে কোন ক্ষেত্রে ঘুড়িটি মাটি থেকে বেশি উঁচুতে থাকবে?

14. উড়ো জাহাজের একজন যাত্রী কোনো এক সময় তাঁর এক পাশে হাওড়া ষ্টেশনটি এবং ঠিক বিপরীত পাশে শহিদ মিনারটি যথাক্রমে 60° ও 30° অবনতি কোণে দেখতে পান। ওই সময়ে উড়োজাহাজটি যদি $545\sqrt{3}$ মিটার উঁচুতে থেকে থাকে, তবে হাওড়া ষ্টেশন ও শহিদ মিনারের দূরত্ব কত?

15. মহাকরণের তেতলার ছাদের উপর যে পতাকা দণ্ডটি আছে তার দৈর্ঘ্য 3.3 মিটার। বি. বি. ডি. বাগের কোনো এক স্থান থেকে দেখলে পতাকা দণ্ডটির চূড়া ও মহাকরণের বাড়িটির ছাদের উন্নতি কোণ যথাক্রমে 50° ও 45° দেখায়। মহাকরণের বাড়িটির উচ্চতা দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মিটারে প্রকাশ কর। (ধরে নেবে $\tan 50° = 1.192$)

16. দুটি স্তম্ভের উচ্চতা যথাক্রমে 180 মিটার ও 60 মিটার। দ্বিতীয় স্তম্ভটির গোড়া থেকে প্রথমটির চূড়ার উন্নতি কোণ 60° হলে, প্রথমটির গোড়া থেকে দ্বিতীয়টির চূড়ার উন্নতি কোণ কত হবে?

17. সূর্যের উন্নতি কোণ 45° হলে, কোনো সমতলে অবস্থিত একটি স্তম্ভের ছায়ার দৈর্ঘ্য যা হয়, উন্নতি কোণ 30° হলে, ছায়ার দৈর্ঘ্য তার চেয়ে 60 মিটার বেশি হয়। স্তম্ভটির উচ্চতা কত ?

18. একটি চিমনির সঙ্গে একই সমতলে অবস্থিত অনুভূমিক সরলরেখায় কোনো এক বিন্দু থেকে চিমনির দিকে 50 মিটার এগিয়ে যাওয়ায় তার চূড়ার উন্নতি কোণ 30° থেকে 60° হল। চিমনিটির উচ্চতা কত ?

19 একটি খালের উপর অবস্থিত একটি সেতুর দিকে সরলরেখায় এগিয়ে যাচ্ছে এমন একটি নৌকা থেকে এক সময়ে সেতুর উন্নতি কোণ 30° ছিল। আরও 24 মিটার এগিয়ে যাওয়ায় নৌকাটি সেতুর নিচে পৌঁছল। নৌকার পাটাতন থেকে সেতুর উচ্চতা কত ?

20. 126 ডেসিমি উঁচু একটি উল্লম্ব খুঁটি মাটি থেকে কিছু উপরে দুমরে গিয়ে উপরের অংশটি কাত হয়ে পড়ায় তার অগ্রভাগ মাটি স্পর্শ করে 30° কোণ উৎপন্ন করে। খুঁটিটি কত উপরে দুমরে গিয়েছিল এবং তার অগ্রভাগ গোড়া থেকে কত দূরে মাটি স্পর্শ করেছিল ?

21. একটি বহুতল বাড়ির পাঁচতলায় জানালার একটি বিন্দু থেকে পাশের পার্কের ফোয়ারাটি 45° অবনতি কোণে দেখা যায়। কিন্তু ফোয়ারা থেকে সেই বাড়ির দোতালার একটি জানালার কোনো একটি বিন্দুকে 30° উন্নতি কোণে দেখা যায়। বাড়িটি থেকে ফোয়ারাটির দূরত্ব 12 মিটার হলে, জানালা দুটির ওই দুটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব কত ? ($\sqrt{3} = 1.732$)

22. মাঠের মাঝখানে দাঁড়িয়ে এক ব্যক্তি একটি উড়ন্ত পাখিকে প্রথমে উত্তর দিকে 30° উন্নতি কোণে এবং 2 মিনিট পর দক্ষিণদিকে 60° উন্নতি কোণে দেখতে পান। পাখিটি যদি বরাবর $50\sqrt{3}$ মিটার উঁচুতে একই সরলরেখায় উড়ে থাকে, তবে তার গতিবেগ কত ?

23. $5\sqrt{3}$ মিটার উঁচু একটি রেলওয়ে ওভারব্রিজে দাঁড়িয়ে এক ব্যক্তি প্রথমে একটি ট্রেনের ইঞ্জিনকে ব্রিজের এপারে 30° অবনতি কোণে দেখলেন, কিন্তু 2 সেকেণ্ড পরই ইঞ্জিনটিকে ব্রিজের ওপারে 45° অবনতি কোণে দেখলেন। ট্রেনটির গতিবেগ কত ছিল ? ($\sqrt{3} = 1.732$ ধরে তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন কিলোমিটারে ফল প্রকাশ কর)

24. ভাটপাড়া ঘাট থেকে দুটি নৌকা পরস্পর 75° কোণ করে গঙ্গার ওপারে আলদা আলদা ঘাটে পৌঁছায়। প্রথম নৌকাটি এপারের সঙ্গে 60° কোণ করে গিয়েছিল। ওপারে পৌঁছাতে দুটি নৌকারই 10 মিনিট সময় লেগেছিল। সেই সময়ে গঙ্গার জলের এপার ওপারের বিস্তার যদি 1200 মিটার হয়, তবে

(*i*) প্রথম নৌকার গতিবেগ কত ছিল ? (*ii*) ওপারের দুটি ঘাটের ব্যবধান কত ? (*iii*) দ্বিতীয় নৌকার গতিবেগ কত ছিল ? ($\sqrt{3} = 1.732$)

25. সকালবেলা অনুপম মাঠের মাঝে একটি পাখিকে পূর্বদিক থেকে পশ্চিম দিকে উড়ে যেতে দেখলো। পাখিটি যখন ঠিক তার মাথার উপর এলো তখন সে দেখলো পাখিটির ছায়া তার কাছ থেকে 200 মিটার দূরে মাটিতে পড়েছে। ঐ সময়ে সূর্যের উন্নতি কোণ ছিল 30°। পাখিটি কত উঁচু দিয়ে উড়ে যাচ্ছিল ?

26. ঝড়ে একটি সুপারীগাছ মাটি থেকে 15 মিটার উপরে দুমড়ে গিয়ে তার অগ্রভাগ ভূমিতল স্পর্শ করেছে। ভূমিতলের সঙ্গে দুমড়ানো অংশ যদি 60° কোণ উৎপন্ন করে থাকে, তবে গাছটি কত লম্বা ছিল এবং তার অগ্রভাগ গোড়া থেকে কত দূরে মাটি স্পর্শ করেছে ?

27. 12 মিটার চওড়া রাস্তার সোজাসুজি এপার ও ওপারে দুটি সমান উঁচু লাইট-পোষ্ট আছে। তাদের সঙ্গে একই সরলরেখায় রাস্তা থেকে কিছু দূরে একটি বহুতল বাড়ির ছাদ থেকে মুর্শিদ লাইট-পোষ্ট দুটির অগ্রভাগ যথাক্রমে 60° ও 45° অবনতি কোণে দেখতে পায়। বাড়িটির রাস্তা থেকে কতদূরে অবস্থিত ? লাইট-পোষ্ট দুটির উচ্চতা যদি 5 মিটার হয়, তবে বাড়িটির উচ্চতা কত ?

28. একটি স্মৃতিস্তম্ভের উপর একটি পতাকা দণ্ড আছে। সূর্যের উন্নতি কোণ 30° হলে, পতাকা দণ্ডটির ছায়ার দৈর্ঘ্য হয় $3\sqrt{3}$ মিটার। পতাকা দণ্ডটির দৈর্ঘ্য কত? যদি স্তম্ভটির উচ্চতা 15 মিটার হয়, তবে দণ্ডসহ স্তম্ভের ছায়ার দৈর্ঘ্য কত হবে ?

29. একটি নদীর পারের সঙ্গে লম্বভাবে একটি সেতু আছে। সেতুটির এপারের প্রান্ত থেকে নদীর পার ধরে কিছুদূর গেলে সেতুর অপর প্রান্তটি 45° কোণে দেখা যায়। পার ধরে আরও 400 মিটার দূরে সরে গেলে সেই প্রান্তটি 30° কোণে দেখা যায়। সেতুটির দৈর্ঘ্য কত ?

30. একটি পার্কের এপারে অবস্থিত 15 মিটার উঁচু একটি বাড়ির ছাদ ও পাদদেশ থেকে পার্কের অপর পারে অবস্থিত একটি কারখানার চিমনির পাদদেশ ও অগ্রভাগ যথাক্রমে 30° অবনতি কোণ ও 60° উন্নতি কোণে দেখা যায়। চিমনিটির উচ্চতা কত এবং চিমনি ও বাড়িটির মধ্যে দূরত্ব কত ?

31 বাবাই তাদের বাড়ির ছাদে বসে মাঠের ওপারে অবস্থিত পাঁচতলা বাড়ির একতলার জানালায় বসা পাপাইকে এবং পাঁচতলার জানালায় বসা তাতাইকে যথাক্রমে 30° অবনতি কোণে ও 30° উন্নতি কোণে দেখতে পায়। বাড়ি দুটির দূরত্ব যদি 24 মিটার হয় এবং একতলার জানালাটি যদি ভূমিতল থেকে $2\sqrt{3}$ মিটার উপরে অবস্থিত হয়, তবে পাপাই ও তাতাই-এর দূরত্ব কত এবং বাবাইদের বাড়িটি কত উঁচু ?

32. সকালবেলা বাবলু লম্বা সুতো দিয়ে ঘুড়ি ওড়াচ্ছিল। ঘুড়িটি ঠিক পশ্চিম দিকের আকাশে ভূমিতলের সঙ্গে 60° কোণ করে উড়ছিল এবং ঘুড়ির ছায়াটি বাবলুর কাছ থেকে $\frac{200}{\sqrt{3}}$ মিটার দূরে মাটিতে পড়েছে। সেই সময় সূর্যের উন্নতি কোণ ছিল 60°,

(*i*) ঘুড়িটি মাটি থেকে কত উপরে উড়ছিল ?

(*ii*) সেই সময় বাবলু কত লম্বা সুতো ছেড়েছিল ? ($\sqrt{3} = 1{\cdot}732$)

উত্তরমালা

উত্তরমালা

ত্রিকোণমিতি

অনুশীলনী 1

1. *(i)* 13° 52′ *(ii)* 2°1′ 52″ *(iii)* 6′15″ *(iv)* 27°5′ *(iv)* 72°2′24″
2. *(i)* $\frac{\pi}{3}$ *(ii)* $\frac{3}{4}\pi$ *(iii)* $-\frac{5}{6}\pi$ *(iv)* $\frac{3}{20}\pi$ *(v)* $\frac{1}{8}\pi$ *(vi)* $-\frac{3}{8}\pi$ *(vii)* $\frac{47}{160}\pi$ 3. 100°, $\frac{5}{9}\pi$ 4. $\frac{1}{4}\pi$ 5. 75°, 60° এবং $\frac{5}{12}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$
6. 2 পূর্ণ পাক এবং 195° কোণ ; ঘড়ির কাঁটার দিকে 7. 87°, $\frac{29}{60}\pi$ 8. 60°
9. $\angle BAD = \angle BCD = \frac{3}{8}\pi$; $\angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{8}\pi$ 10. $\angle BAD = \angle DBC = \frac{3}{8}\pi$: $\angle ABD = \angle BCD = \frac{1}{8}\pi$ এবং $\angle ADB = \angle BDC = \frac{1}{2}\pi$
11. $\angle EAC = \angle AEC = \frac{1}{6}\pi$; $\angle ACE = \frac{2}{3}\pi$.

অনুশীলনী 2

1. $\frac{3}{5}, \frac{3}{4}$ 2. $\frac{15}{17}, \frac{17}{8}$ 3. $\frac{8}{17}, \frac{17}{15}$ 4. $\frac{3}{4}, \frac{5}{3}$ 5. $\frac{12}{13}, \frac{5}{13}, \frac{12}{5}$ 6. $\frac{5}{7}$
8. *(i)* $\frac{1}{2}$ *(ii)* $\sqrt{2}+1$ *(iii)* 0 *(iv)* 0 *(v)* $\frac{17}{13}$ *(vi)* 0 *(vii)* $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ *(viii)* $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ *(ix)* $\frac{4}{3}$ *(x)* $\frac{1}{2}$ *(xi)* $\pm\frac{3}{2}$ *(xii)* 1 *(xiii)* $\pm\frac{4}{\sqrt{3}}, \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{3}$ বা $\frac{1}{\sqrt{3}}$ *(xiv)* $\frac{13}{12}$ *(xv)* $\frac{1}{\sqrt{5}}$ *(xvi)* $\frac{1}{\sqrt{16}}$

10. $\frac{m.}{\sqrt{m^2+n^2}}, \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}$

অনুশীলনী 3

1. 0·6, 0·8, 0·75, 1·67, 1·25, 1·33 এবং 0·8, 0·6, 1·33, 1·25, 1·67, 0·75 3. *(i)* $\frac{1}{2}$ *(ii)* 0 *(iii)* 1 *(iv)* $3\frac{1}{3}$ *(v)* $\frac{6+\sqrt{6}}{3}$ *(vi)* 0 *(vii)* 9 *(viii)* $\frac{5}{2\sqrt{3}}$ *(ix)* 0 *(x)* $\frac{3\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}$ *(xi)* $5\frac{1}{3}$ *(xii)* 1 6. $\frac{1}{\sqrt{3}}$
7. $2\frac{2}{3}$ 8. $\pm\frac{1}{2}$ 9. 530 মি.

অনুশীলনী 5

1. $20\sqrt{3}$ মি 2. $75\sqrt{3}$ মি 3. 9 মি 4. 8 মি, 24 মি 5. *(i)* $4\sqrt{3}$ মি *(ii)* $2\sqrt{3}$ মি $2(3+\sqrt{3})$ মি *(iii)* 6 মি 6. 20·784 মি 7. 21 মি 8. $3\sqrt{3}$ মি 9. 7·098 মি 10. $19\sqrt{3}$ মি 11. 450 মি, $150\sqrt{3}$ মি 12. 64 মি, $16\sqrt{3}$ মি 13. $125\sqrt{3}$ মি, $125\sqrt{2}$ প্রথম ক্ষেত্রে 14. 2180 মি 15. 17·19 মি (প্রায়) 16. 30° 17. 81·96 মি (প্রায়) 18. $25\sqrt{3}$ মি 19. $8\sqrt{3}$ মি 20. 42 ডেসিমি, $42\sqrt{3}$ ডেসিমি 21. 5·072 মি 22. 6 কিমি/ঘণ্টা 23. 42·588 কিমি/ঘণ্টা 24. *(i)* 8·32 কিমি (প্রায়)/ঘণ্টা, 1892·8 মি, 10·18 কিমি (প্রায়)/ঘণ্টা 25. 115·47 মি (প্রায়) 26. 32·32 মি, 8·66 মি (প্রায়) 27. 16·392 মি, 33·392 মি 28. 3 মি, $18\sqrt{3}$ মি 29. $200(\sqrt{3}+1)$ মি 30. 45 মি, $15\sqrt{3}$ মি 31. $16\sqrt{3}$ মি, $10\sqrt{3}$ মি 32. 100 মি, 115·47 মি (প্রায়) ।

Ganit IX-X (Vol-II)/SA/'97

No. 9366

Price Rs. 32.00